matemática moderna

Papy

II

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

MATEMÁTICA MODERNA

GEORGES PAPY

"La matemática que, a principio de siglo, apenas tenía aplicación fuera de la física y del arte del ingeniero, se ha convertido en elemento fundamental del humanismo contemporáneo y en herramienta indispensable en la mayoría de los dominios del pensamiento, de la ciencia y de la técnica", sostiene el autor del presente libro, y de este hecho innegable deduce la necesidad de enseñar los principios matemáticos básicos a todos los estudiantes secundarios.

Matemática moderna es una obra destinada a profesores y alumnos de la escuela media, pero útil a todos quienes busquen una versión actual de la ciencia. En su lengua original ha llegado ya a los seis volúmenes, inmediatamente traducidos a otros idiomas. Este segundo tomo que presenta EUDEBA se ocupa de los siguientes temas: rectas punteadas, graduaciones de la recta, el axioma de Arquímedes, subgraduaciones de la recta, el teorema de Thales, homotecias, multiplicación de números reales y multiplicación escalar, números racionales e irracionales, vectoriales, ecuaciones de rectas, semiplanos,

Matemática moderna

LA ESCUELA EN EL TIEMPO
Textos del secundario/Matemática

PAPY
con la colaboración de
Frédérique Papy

MATEMATICA MODERNA

Tomo II

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

Título de la obra original:
Mathématique moderne
Marcel Didier, Editeur, Bruxelles, Paris, 1968

Traducida por
Irma Dumrauf

La revisión técnica estuvo a cargo de
Estela O. de González Baró

© 1970
EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES
Rivadavia 1571/73
Sociedad de Economía Mixta
Fundada por la Universidad de Buenos Aires
Hecho el depósito de ley
IMPRESO EN LA ARGENTINA - PRINTED IN ARGENTINA

A Th. Henri Lepage

PREFACIO

Los números reales y los espacios vectoriales desempeñan un papel primordial en la matemática de hoy y en la mayor parte de sus aplicaciones.

Este libro tiende esencialmente a construir el cuerpo de número reales *y el* espacio vectorial plano. *Ha sido escrito muy especialmente para los alumnos de 13 años que ya recibieron una primera enseñanza que abarca los temas expuestos en [MM 1]* [1]. *Es el fruto de una experiencia de seis años en las clases experimentales de distintos niveles.*

* * *

Es trivial considerar la numeración de posición (con sub-múltiplos) como uno de los más grandes descubrimientos de la humanidad. La enseñanza tradicional de la geometría data de la época de Euclides, es decir, es anterior a dicho descubrimiento, y se priva deliberadamente de su preciosa utilización.

Nosotros construimos el cuerpo de reales utilizando de manera natural la numeración de posición, en la que los niños han sido iniciados en la escuela primaria.

* * *

Preferimos utilizar en las partes teóricas el sistema binario y no el decimal, porque presenta sobre éste varias ventajas.

1. *En decimal, los alumnos calculan de manera automática. La utilización del binario los obliga a reflexionar.*
2. *En binario, en la práctica es posible dibujar cinco sub-graduaciones sucesivas, mientras que en decimal se pueden dibujar a lo sumo dos, y ello no pone en evidencia de manera tan clara la repetición del procedimiento.*
3. *En cada etapa, la localización de un punto es mucho más fácil en binario, puesto que no hay más que dos posibilidades contra diez en el sistema decimal.*

---

[1] [MM 1] PAPY, *Matemática moderna 1*, Buenos Aires, Eudeba, 1968.

4. *La utilización del binario será esencial para nuestra presentación de la "medida de los ángulos".*

Los alumnos transportan inmediatamente al decimal los procedimientos descriptos en el sistema binario.

Los cálculos prácticos se efectuarán siempre en decimal.

Por consiguiente es innecesario consagrar mucho tiempo a efectuar pasajes de un sistema al otro.

Consideramos inútil la introducción de toda base de numeración distintas de 2 y 10.

***

El método utilizado para introducir los reales es el procedimiento que preside toda medida.

Los números reales están así presentados bajo una forma particularmente adaptada a su utilización esencial en las ciencias experimentales: la medida de magnitudes. Su aparición bajo forma decimal o binaria favorece el cálculo numérico.

***

Medir es, ante todo, construir graduaciones y sub-graduaciones.

Para poner bien en evidencia que se pueden construir las graduaciones y sub-graduaciones de una recta sin recurrir a una longitud, conviene "salir" de la recta. También nos situamos deliberadamente en el plano afín. El sistema de axiomas utilizado es el de Artin en Geometric Algebra, *restringido aquí al caso arquimediano completo* [1].

Los enteros racionales fueron introducidos en [MM 1] y presentados bajo forma binaria y decimal.

Toda referencia sobre una recta define una graduación y una biyección entre ella y Z. Los enteros racionales determinan así ciertos puntos de la recta.

Para niños ya habituados a la numeración de posición es natural marcar los puntos de la primera sub-graduación mediante binarios limitados. Éstos designan números que los niños ya conocen. A partir de esta etapa se observará

---

[1] ARTIN, *Geometric Algebra* (Interscience Publishers, Nueva York, 1957. Traducido al francés por Lazard, con el título *Algèbre Géométrique,* Actualités Scientifiques. Gauthier - Villars, 1962).

"Ver, por ejemplo, PAPY-DEBBAUT "Geométrie Affine Plane et Nombres Réel" (Collection Frédérique Nº I - Editorial Universitaria de Bruselas, Gauthier-Villars, Paris 1962) o J. DIEUDONNÉ: "Foundations of Modern Analysis" (Prensa Academica, Nueva York y Londres, 1960), "Fondements de l'Analyse Moderne", Gauthier-Villars, París 1963.

que ciertos puntos están marcados de dos maneras distintas. Estos términos iguales *designan el mismo* número.

La repetición del procedimiento introduce el conjunto B de números binarios limitados.

***

Nuestros niños conocen, además de los binarios limitados, otros números. Ellos pueden indicar claramente el punto de D_{01} *que sería natural marcar 1/3. Ningún binario limitado marca este punto que está perfectamente determinado por un binario ilimitado. Consideraremos todos los binarios ilimitados como términos que designan números:* los números reales. *La definición termina indicando cuidadosamente qué números pueden ser designados por varios binarios.*

El conjunto de números reales se designa de una vez por todas con **R** *y constituye, en lo sucesivo, una constante de la teoría.*

Toda referencia de una recta define una biyección entre esta recta y **R**.

***

El método que acabamos de describir necesitó la introducción de dos axiomas.

A partir de una escala graduada, el Axioma de Arquímedes *parece tan natural que se lo escamotea de buen grado. Con los alumnos hacemos una pausa para enunciarlo explícitamente.*

El axioma de Arquímedes permite enunciar el Axioma de completud *o de continuidad:*

"La intersección de toda sucesión binaria de intervalos cerrados encajados es no vacía."

En un primer nivel de enseñanza, preferimos admitir el axioma aparentemente más fuerte que afirma que esta intersección es un conjunto unitario.

Se tendrá un cuidado especial en hacer admitir que $3 = 2{,}9999\ldots$

Las exposiciones tradicionales no recalcan suficientemente este hecho y es común oír decir que $2{,}9999\ldots 999\ldots$ *es menor que* 3, *lo que en realidad es negar el axioma de Arquímedes.*

***

En el capítulo **2**, *probamos que toda recta punteada orientada* D_0, $\leqslant$ *es un grupo conmutativo ordenado para la adición definida en* Π_0, $+$

La biyección definida por la referencia (0,1) permite transportar esta estructura sobre $\mathfrak{R}$.

Se comprueba al fin que la estructura transportada no depende de la elección de D_{01}.

El conjunto de **R** *se provee a sí mismo de una estructura de grupo conmutativo ordenado. Sabemos además, cosa fundamental para las aplicaciones que la biyección definida por una referencia respeta esta estructura.*

Esta presentación de la estructura $\mathbf{R}, +, \leqslant$ *introduce muy naturalmente un cálculo de error.*

***

El capítulo **8** *demuestra de manera expeditiva el teorema de Tales, evitando la anticuada distinción entre el caso conmensurable y el caso inconmensurable.*

La consecuencia principal del teorema de Tales es la existencia de homotecias.

El capítulo **9** *establece que el conjunto de homotecias no constantes de centro* c *es un grupo conmutativo para la composición.*

En el capítulo **10**, *se prueba que la relación de la compuesta de dos homotecias de igual centro depende exclusivamente de las razones de las homotecias dadas, lo cual define la multiplicación de los reales y convierte a* $\mathbf{R}_0$ *en un grupo conmutativo.*

Esta estructura es el marco natural para la introducción de fracciones con términos reales.

En el capítulo **11**, *se prueba que la imagen de un vector por una homotecia depende exclusivamente de la razón de la homotecia, lo cual define la multiplicación escalar*

$$\mathbf{R} \times \Pi_0 \to \Pi_0 : (r, \vec{v}) \to r\,\vec{v}$$

El capítulo termina probando la linearidad de las proyecciones paralelas y de las homotecias.

***

Las mayores dificultades de orden conceptual han sido, pues, vencidas.

El capítulo **12** *reúne y clasifica los resultados obtenidos. Pone en evidencia la estructura de cuerpo ordenado de números reales, lo cual aumenta notablemente la comprensión de la teoría. En este marco se completa el estudio de*

fracciones y se desarrolla (cap. 13) el cálculo numúrico y literal clásico (exponentes negativos, cuadrado y cubo de una suma, expresión de $x^n - y^n$, *... etc...).*

* * *

Después de haber introducido el conjunto **R** *de todos los números reales, conviene extraer el sub-cuerpo de racionales.*

El capítulo 14 introduce las divisiones con resto (arquimedeana y euclideana) y pone en evidencia el cuerpo ordenado numerable de racionales.

La división enclideana ilimitada presenta toda fracción racional bajo forma de decimal periódico. Recíprocamente, se muestra que todo decimal periódico designa un número racional.

Los números irracionales son los reales representados por los decimales no periódicos.

El capítulo termina con la demostración de la no numerabilidad de **R**.

* * *

El capítulo 15 reúne las propiedades que permiten afirmar que $\mathbf{R}$, Π_0, $+$ *es un vectorial real, lo cual introduce la definición de vectoriales reales.*

Se inicia a los alumnos en la técnica del cálculo en un vectorial estableciendo, en el caso general, algunas de las reglas de cálculo ya conocidas por ellos en $\mathbf{R}$, Π_0, $+$.

Las bases y coordenadas en $\mathbf{R}$, Π_0, $+$ *introducen el vectorial* $\mathbf{R}^2$ *de cuplas de reales. Toda base de* π_0 *define un isomorfismo de vectorial* $\Pi_0 \to \mathbf{R}^2$

* * *

Los tres últimos capítulos del libro introducen sistemáticamente la máquina-industrial $\mathbf{R}$, Π_0, $+$ *para estudiar las ecuaciones de las rectas, las inecuaciones de los semi-planos y los cambios de referencia sobre una recta.*

Se demuestra en particular que la imagen de una recta por una traslación, una homotecia no constante o una simetría paralela, es una recta.

* * *

Agradezco al señor Pierre Debbaut, que colaboró en la redacción del fascículo 1º de la colección Frédérique Geometría afín plana y números reales, *destinado a los profesores antes de la segunda etapa de la experiencia. En esta obra, la conmutatividad de la multiplicación de los reales se presenta de una manera que consideramos demasiado difícil para alumnos de trece años. Rindo*

homenaje al señor Bex, que proporcionó la primera demostración accesible a los alumnos, pero a la cual preferimos la del texto.

Toda mi gratitud se dirige a los Asistentes del Centro Belga de Pedagogía de la Matemática, señora Gilberte Capiaux, padre Dearman, hermano Benoit Provencher, señores Edmond Van Veckom y Alfred Vermandel, que leyeron cuidadosamente el manuscrito y las pruebas y establecieron el índice de la obra.

Dirijo mis mejores felicitaciones a la señora Cagnant, que brindó su talento habitual para las ilustraciones.

Mi reconocimiento a la Editorial Didier y a la imprenta Erasmus por el cuidado minucioso que consagraron a la edición y a la impresión del libro.

El lector un poco informado sabe que esta obra no hubiese visto jamás el día sin la inspiración y el riguroso espíritu de organización de Frédérique. Le dirijo aquí mi más afectuoso agradecimiento.

Papy

Bruselas, junio de 1965

1

El grupo Π_o , +

1 — EL PLANO PUNTEADO Π_o

He aquí el plano Π .
Todos los puntos del plano Π desempeñan el mismo papel.
Dibuja algunos puntos del plano Π y llámalos *a*, *b*, *c*, *d*, . . .

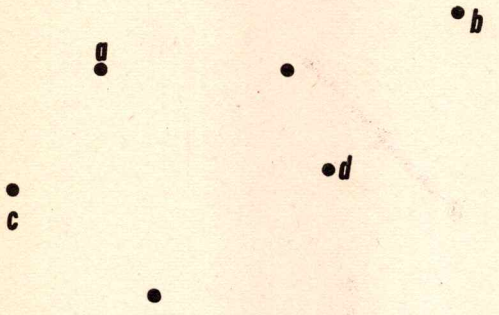


FIG. 1

Llama **o** a uno de los puntos del plano Π .

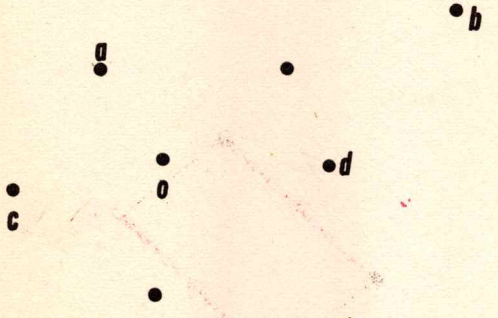


FIG. 2

El punto *a* define la traslación o vector $\overrightarrow{oa}$.

El punto *b* define la traslación o vector $\overrightarrow{ob}$, .

Fijando el punto o una vez por todas, resulta cómodo poner

$$\vec{a} = \overrightarrow{oa}$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{ob} \quad \ldots$$

y en particular $$\vec{o} = \overrightarrow{oo}$$

Hemos designado con V el conjunto de vectores del plano.

Por lo tanto $$V = \{\vec{p} = \overrightarrow{op} \mid p \in \Pi\}$$

Hemos designado con Π_o el plano Π en el cual hemos llamado *o* a uno de sus puntos.

La aplicación $$\Pi_o \to V : p \to \vec{p} = \overrightarrow{op}$$ es biyectiva.

Por lo tanto es posible representar todo vector de V por un punto de Π_o.

— He aquí un vector $\vec{v} \in V$:

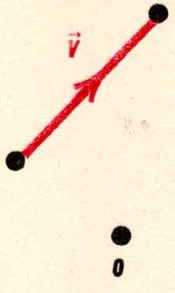


FIG. 3

Construye el punto v que representa a $\vec{v}$.

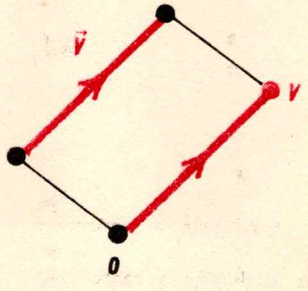


FIG. 4

1. EL PLANO PUNTEADO Π_o

— He aquí los puntos v, a, $b \in \Pi_o$:

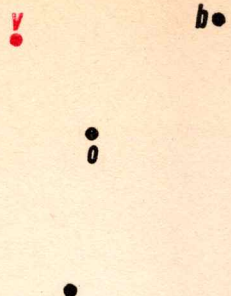


FIG. 5

¿Quieres construir la cupla de $\vec{v}$ de origen a

y la cupla de $\vec{v}$ de extremidad b?

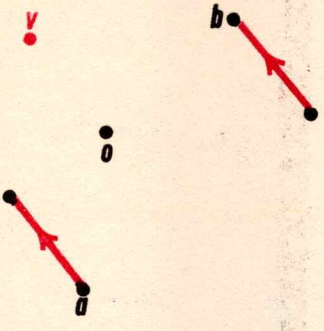


FIG. 6

Los puntos de Π_o representan perfectamente los vectores de V.

Ello nos permite anotar en los dibujos $\vec{v}$ en lugar del punto $v \in \Pi_o$

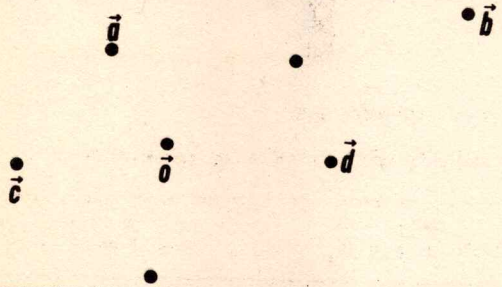


FIG. 7

De este modo se **identifica** Π_o y V

$$\Pi_o = V$$

Tendremos en cuenta esta convención en todo lo que sigue.

2 — EL GRUPO CONMUTATIVO Π_o , +

He aquí dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \Pi_o$:

Construye $\vec{a} + \vec{b}$.

Construye $\vec{b} + \vec{a}$.

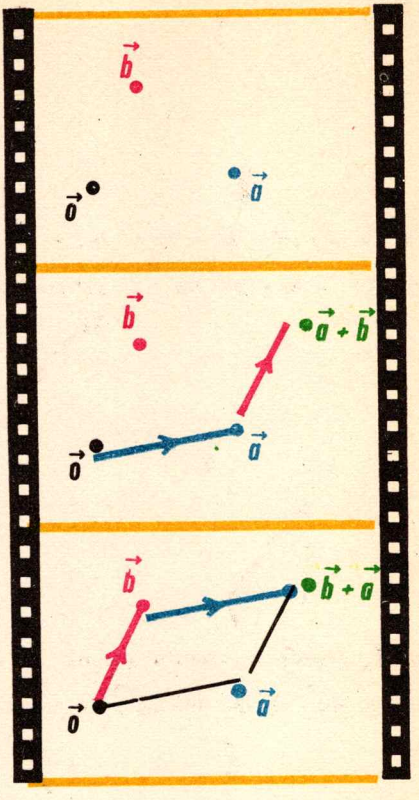


FIG. 8

Esta construcción nos recuerda que

la adición de vectores es conmutativa.

Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \in \Pi_o$

Todo vector es una traslación y por lo tanto una relación.

Sabemos que la adición de los vectores no es más que la composición de traslaciones.

La composición de relaciones es asociativa.

Por lo tanto, **la adición de vectores es asociativa.**

2. EL GRUPO CONMUTATIVO Π_o , +

Para todo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi_o$: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

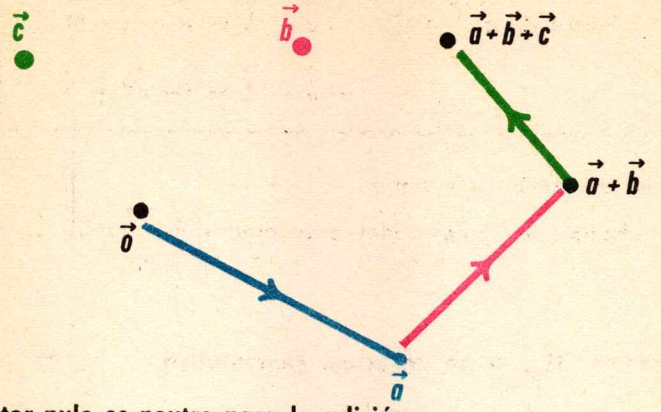


FIG. 9

El vector nulo es neutro para la adición:

Para todo $\vec{x} \in \Pi_o$: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{x} = \vec{o} + \vec{x}$

Para todo $\vec{a} \in \Pi_o$, llamaremos $-\vec{a}$ al vector que representa la imagen de a por la simetría de centro o.

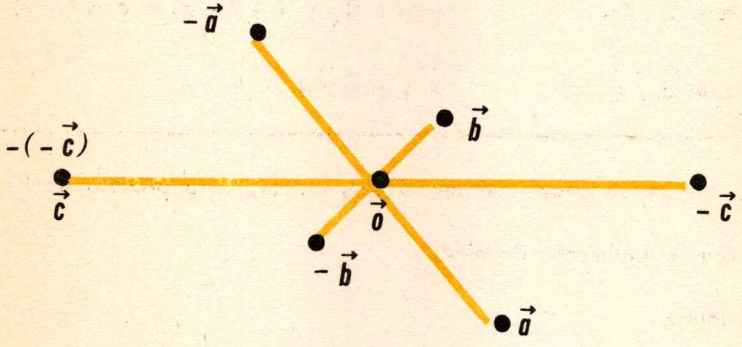


FIG. 10

Claramente:

Para todo $\vec{x} \in \Pi_o$: $-(-\vec{x}) = \vec{x}$

Para todo $\vec{x} \in \Pi_o$, el vector $-\vec{x}$ es el simétrico de $\vec{x}$.

Para todo $\vec{x} \in \Pi_o$: $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{o} = (-\vec{x}) + \vec{x}$

Recordemos que se simplifica la notación poniendo:

$$\text{Para todo } \vec{a}, \vec{b} \in \Pi_o \quad : \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$
$$-\vec{a} + \vec{b} = (-\vec{a}) + \vec{b}$$

lo cual **define** la sustracción de vectores.

Coma ya sabemos, las propiedades encuadradas más arriba se resumen diciendo que:

Π_o, + es un grupo conmutativo

1. Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$: $\vec{x} + \vec{y} \in \Pi_o$
2. Para todo $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Pi_o$: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$
3. Para todo $\vec{x} \in \Pi_o$: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{x} = \vec{o} + \vec{x}$
4. Para todo $\vec{x} \in \Pi_o$: $-\vec{x} \in \Pi_o$ y $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{o} = (-\vec{x}) + \vec{x}$
5. Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

Π_o, + **es un grupo** porque el conjunto Π_o está provisto de la ley +.

1. interna y totalmente definida,
2. asociativa,
3. que admite el neutro $\vec{o}$,
4. y tal, que todo elemento $\vec{x} \in \Pi_o$ admite un simétrico $-\vec{x} \in \Pi_o$.

El grupo Π_o, + es conmutativo porque;

5. su ley + es conmutativa.

3 — VECTORES PARALELOS

En el plano Π_o:

Si $\overrightarrow{o_1a_1} = \overrightarrow{o_2a_2}$ y $\overrightarrow{o_1b_1} = \overrightarrow{o_2b_2}$

Entonces o_2, a_2, b_2 alineados **ssi** o_1, a_1, b_1 alineados

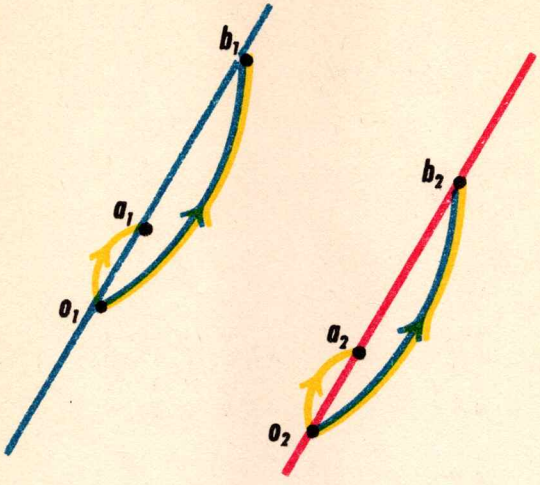


FIG. 11

. . . lo cual permite la

DEFINICIÓN 1

Si $\vec{a}, \vec{b} \in \Pi_o$

Entonces $\vec{a} \,//\, \vec{b}$ **ssi** *o, a, b alineados.*

Se dice entonces que los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ *son* ***paralelos*** *o que tienen la* ***misma dirección.***

La fórmula

$$\vec{u} \,\#\, \vec{v}$$

indica que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ no son paralelos.

En la situación siguiente:

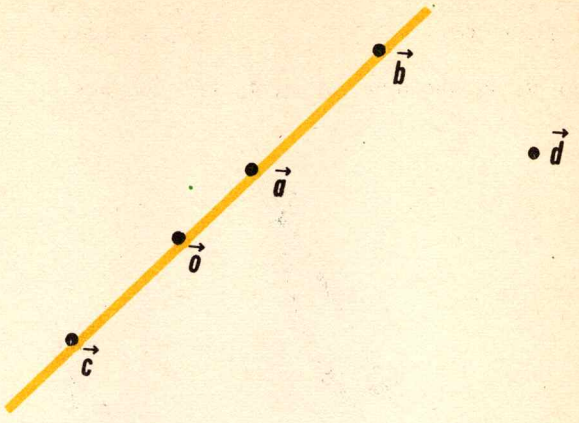


FIG. 12

$\vec{a} \,//\, \vec{b}$, $\vec{b} \,//\, \vec{c}$, $\vec{c} \,//\, \vec{a}$
$\vec{b} \,//\, \vec{a}$, $\vec{c} \,//\, \vec{b}$, $\vec{a} \,//\, \vec{c}$

$\vec{o} \,//\, \vec{a}$, $\vec{o} \,//\, \vec{b}$, $\vec{o} \,//\, \vec{c}$, $\vec{o} \,//\, \vec{d}$
$\vec{a} \,//\, \vec{o}$, $\vec{b} \,//\, \vec{o}$, $\vec{c} \,//\, \vec{o}$, $\vec{d} \,//\, \vec{o}$

$\vec{a} \,\#\, \vec{d}$, $\vec{b} \,\#\, \vec{d}$, $\vec{c} \,\#\, \vec{d}$
$\vec{d} \,\#\, \vec{a}$, $\vec{d} \,\#\, \vec{b}$, $\vec{d} \,\#\, \vec{c}$

$\vec{o} \,//\, \vec{o}$

PROPOSICIÓN — *La relación // que acabamos de definir en* Π_o *es:*

1º *reflexiva,* 2º *simétrica,* 3º **no transitiva**

DEMOSTRACIÓN:

1º Para todo $\vec{v} \in \Pi_o$: $\vec{v} \,//\, \vec{v}$
... lo cual es evidente: ¡los puntos o, v, v están alineados!

2º Para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \Pi_o$: $\vec{u} \,//\, \vec{v} \iff \vec{v} \,//\, \vec{u}$

En efecto,

$\vec{u} \,//\, \vec{v} \iff$ o, u, v alineados $\iff$ o, v, u alineados $\iff \vec{v} \,//\, \vec{u}$

3º En la situación de la figura 12,

$\vec{a} \,//\, \vec{o}$, $\vec{o} \,//\, \vec{d}$ y sin embargo $\vec{a} \,\#\, \vec{d}$

l.q.q.d.

DEFINICIÓN 2 — *Se llama* **dirección** *del vector* **no nulo** $\vec{a} \in \Pi_o$ *a la dirección de la recta* **oa**.

Dicho de otro modo,

si $\vec{o} \neq \vec{a} \in \Pi_o$, entonces $dir.\,\vec{a} = dir.\,oa$

4 — CONJUNTO DE VECTORES PARALELOS A UN VECTOR

He aquí un vector $\vec{v} \in \Pi_o$

¿Cuál es el conjunto de vectores paralelos a $\vec{v}$?

Este conjunto se anota:

$$\{\vec{x} \in \Pi_o \mid \vec{x} \,//\, \vec{v}\}$$

Si $\vec{v} = \vec{o}$, **Entonces** todo vector $\vec{x} \in \Pi_o$ es paralelo a $\vec{v}$.

Si $\vec{v} \neq \vec{o}$, **Entonces** $\vec{x} \,//\, \vec{v} \iff o, x, v$ alineados $\iff x \in ov$.

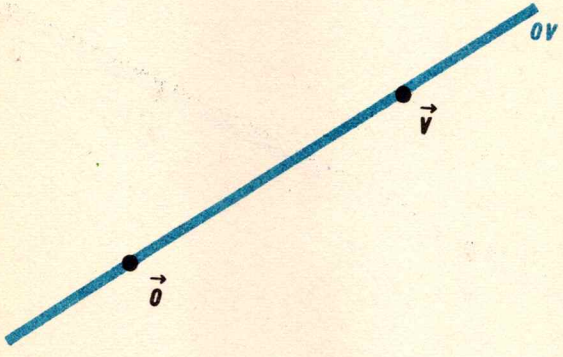


FIG. 13

De donde:

$$\{\vec{x} \in \Pi_o \mid \vec{x} \,//\, \vec{o}\} = \Pi_o \qquad y \qquad \{\vec{x} \in \Pi_o \mid \vec{x} \,//\, \vec{v} \neq \vec{o}\} = ov$$

5 — SUB-GRUPO DE VECTORES PARALELOS A UN VECTOR

TEOREMA 1 — Si $\vec{v} \in \Pi_o$

Entonces el conjunto de vectores paralelos a $\vec{v}$ es un sub-grupo de Π_o, +.

DEMOSTRACIÓN:

Si $\vec{v} = \vec{o}$,

Entonces el conjunto de vectores paralelos a $\vec{v}$ es Π_o,
es decir, un sub-grupo de Π_o, +.

Si $\vec{v} \neq \vec{o}$,

Entonces el conjunto de vectores de Π_o paralelos a $\vec{v}$ es la recta ov.
Probemos por consiguiente que:
Toda recta D que comprende el punto o es un sub-grupo de Π_o, +.
He aquí una recta D que comprende el punto *o*:

1º Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in D : \vec{x} + \vec{y} \in D$

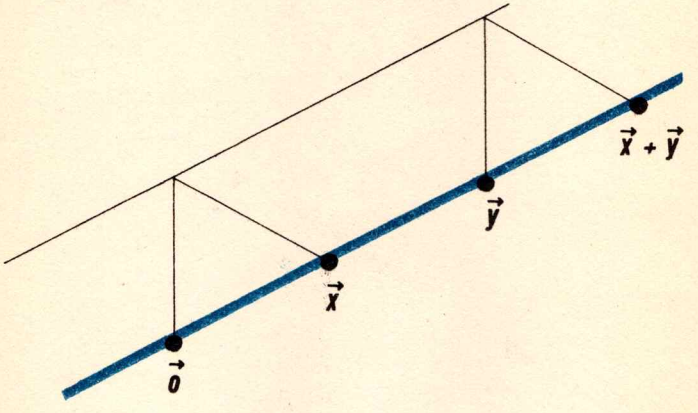


FIG. 14

De este modo D está provista de una ley + que es automáticamente **asociativa y conmutativa**, puesto que lo es para la adición de vectores.

2º $\vec{o} \in D$ y para todo $\vec{x} \in D : \vec{x} + \vec{o} = \vec{x} = \vec{o} + \vec{x}$

3º Si $\vec{x} \in D$, **Entonces** $-\vec{x} \in D$ y $\vec{x} - \vec{x} = \vec{o} = -\vec{x} + \vec{x}$.

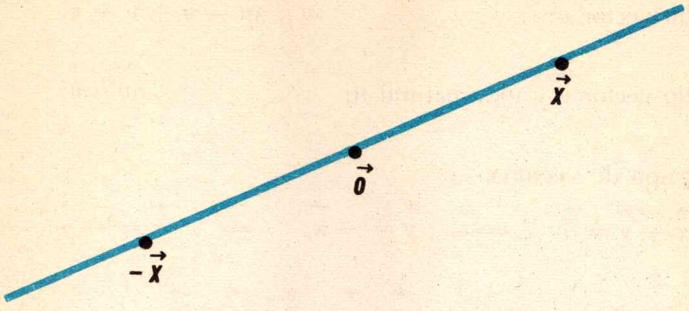


FIG. 15

Ya hemos visto que una vez que en el plano hemos fijado un punto o, este plano se convierte en el grupo conmutativo $\Pi_o, +$.

Acabamos de ver más arriba que una vez que hemos fijado un punto o de una recta D, esta recta se convierte en un grupo conmutativo que es natural designar con $D_o, +$.

He aquí una recta D:

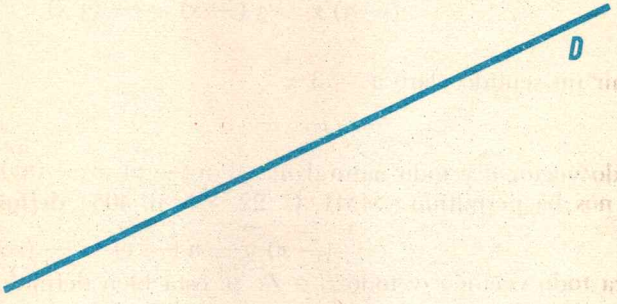


FIG. 16

...y esta recta se convierte en
EL GRUPO CONMUTATIVO
$D_o, +$

FIG. 17

6 — EJERCICIOS

1. Para todo vector $\vec{v}$: $\vec{v} \,//\, 2\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$

2. Para todo vector $\vec{v}$: $\vec{v} \,//\, 3\vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$

3. Para todo vector $\vec{v}$ y todo natural n: $n\vec{v} \,//\, \vec{v}$

4. En el grupo de vectores:
$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{o} \iff \vec{y} = -\vec{x} \iff \vec{x} = -\vec{y}$$

5. En el grupo V, +, calcular $\vec{x} + \vec{x} - \vec{x} - \vec{x} - \vec{x}$

6. En el grupo V, +
$$3\vec{x} - (3\vec{x}) = \vec{o}$$
$$3\vec{x} + 3(-\vec{x}) = \vec{o}$$
$$3(-\vec{x}) = -(3\vec{x})$$
lo cual nos ha permitido (MM1, C. 22, § 6, p. 405) **definir:**
$$(-3)\vec{x} = 3(-\vec{x}) = -(3\vec{x})$$
y atribuir un sentido claro a $-3\vec{x}$

7. Para todo vector $\vec{v}$ y todo natural n: $n(-\vec{v}) = -(n\vec{v})$
lo cual nos ha permitido (MM1, C. 22, § 6, p. 405) **definir:**
$$(-n)\vec{v} = n(-\vec{v}) = -(n\vec{v})$$
Así, para todo vector $\vec{v}$ y todo $z \in \mathbf{Z}$: $z\vec{v}$ está bien definido.

8. Para todo $z \in \mathbf{Z}$ y todo vector $\vec{v}$: $z\vec{v} \,//\, \vec{v}$

9. **Si** $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Pi_o$ y $\vec{y} \neq \vec{o}$,

   Entonces $\vec{x} \,//\, \vec{y}$ y $\vec{y} \,//\, \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \,//\, \vec{z}$

10. La relación // definida en el conjunto de vectores **no nulos** es transitiva.

11. La relación // definida en $\Pi_o \setminus \{\vec{o}\}$ es una equivalencia.
¿Cuál es la partición de $\Pi_o \setminus \{\vec{o}\}$ definida por esta equivalencia?

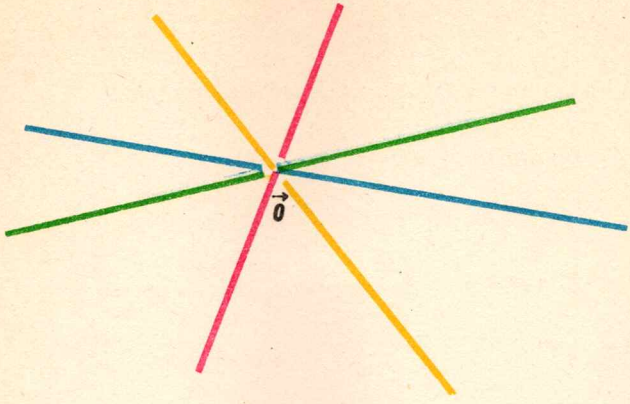


FIG. 18

12. Si $\vec{o} \in D_o \in \mathfrak{D}$ y $\vec{o} \neq \vec{v} \in D_o$
Entonces D_0 es el sub-grupo de vectores paralelos a $\vec{v}$.

13. Si $\vec{o} \in D_o \in \mathfrak{D}$ y $\vec{v} \in D_o$ **Entonces** $\mathbf{Z}\vec{v} = \{ z\vec{v} \mid z \in Z \} \subset D_o$

14. Para todo $z_1, z_2 \in Z$, y para todo vector $\vec{v}$: $z_1\vec{v} + z_2\vec{v} = (z_1 + z_2)\vec{v}$

15. Si la recta D_0 del plano Π_o comprende $\vec{o}$ y $\vec{v}$,
entonces $\mathbf{Z}\vec{v}$ es un sub-grupo de D_0, $+$.

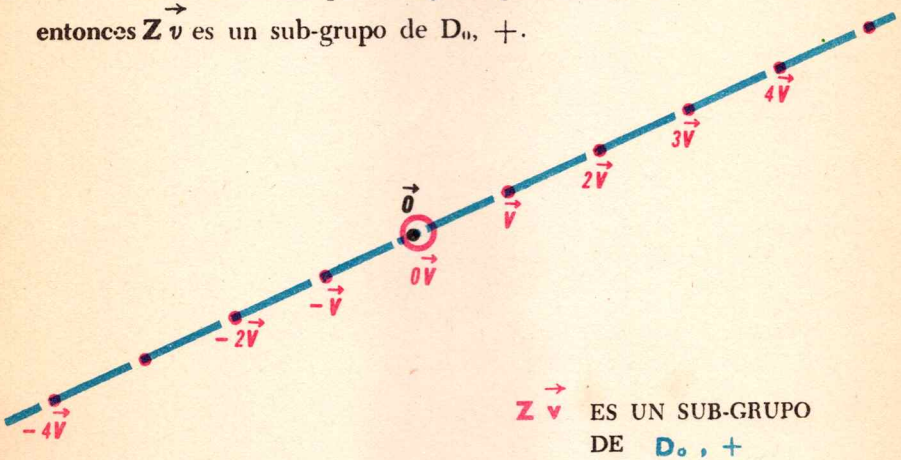


FIG. 19

16. Para todo $z \in \mathbf{Z}$: $z\vec{o} = \vec{o}$

17. Para todo $\vec{v} \in \Pi_o$: $\mathbf{Z}\vec{v}$ es el menor sub-grupo de Π_o, $+$ que comprende $\vec{v}$.

18. Calcula $\mathbf{Z}\vec{o}$.

19. ¿Cuál es el menor sub-grupo de Π_o que comprende $\vec{o}$?

20. $\{\vec{o}\}$ es un sub-grupo de Π_o, $+$.

21. Para todo vector $\vec{v}$: $4\vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$

22. Para todo vector $\vec{u}$: $4\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$

23. Para todo vector $\vec{v}$: $3\vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$

24. Para todo vector $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3\vec{v} &= 3\vec{v} + 3\vec{v} + 3\vec{v} + 3\vec{v} \\ &= \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} + \vec{v} \\ &= 4 \times 3 \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

25. Para todo $b \in \omega$ y todo vector $\vec{v}$: $b\vec{v} = \underbrace{\vec{v} + \ldots + \vec{v}}_{b}$

26. Para todo $a \in \omega$ y todo vector $\vec{u}$: $a\vec{u} = \underbrace{\vec{u} + \ldots + \vec{u}}_{a}$

27. Para todo $a, b \in \omega$ y todo vector $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} a \cdot b\vec{v} &= \underbrace{b\vec{v} + \ldots + b\vec{v}}_{a} \\ &= \underbrace{\underbrace{\vec{v} + \ldots + \vec{v}}_{b} + \ldots + \underbrace{\vec{v} + \ldots + \vec{v}}_{b}}_{a} \\ &= \underbrace{\vec{v} + \ldots + \vec{v}}_{a.b} = ab \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

28. Para todo $a, b \in \omega$ y todo $\vec{v} \in V$:

$$a \cdot b\vec{v} = ab \cdot \vec{v} = ba \cdot \vec{v} = b \cdot a\vec{v}$$

En particular, $a \cdot b\vec{v} = b \cdot a\vec{v}$

29. Para todo vector $\vec{v}$: $\quad (-3)\vec{v} = 3(-\vec{v}) = -(3\vec{v})$

30. Para todo $b \in \omega$ y todo $\vec{v} \in V$: $(-b) \cdot \vec{v} = b(-\vec{v}) = -(b\vec{v})$

31. Para todo $a, b \in \omega$ y todo $\vec{v} \in V$:

$$ab \cdot (-\vec{v}) = (-ab) \cdot \vec{v} = a(-b) \cdot \vec{v}$$

32. Para todo $a, b \in \omega$ y todo $\vec{v} \in V$:

$$\begin{aligned} a \cdot (-b)\vec{v} &= a \cdot b(-\vec{v}) \text{ (ejercicio 30)} \\ &= ab \cdot (-\vec{v}) \text{ (ejercicios 27, 28)} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} &= (-ab) \cdot \vec{v} \text{ (ejercicio 30} \\ &= a(-b) \cdot \vec{v} \end{aligned} \right.$$

33. Para todo $a, b \in \omega$ y todo vector $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b\vec{v} &= -(a \cdot b\vec{v}) \text{ (ejercicio 30)} \\ &= -(ab \cdot \vec{v}) \text{ (ejercicios 27, 28)} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} &= (-ab) \cdot \vec{v} \text{ (ejercicio 30)} \\ &= (-a)b \cdot \vec{v} \end{aligned} \right.$$

34. Para todo $a, b \in \omega$ y todo vector $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b)\vec{v} &= -(a \cdot (-b)\vec{v}) \text{ (ejercicio 30)} \\ &= -(a(-b) \cdot \vec{v}) \text{ (ejercicio 32)} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} &= -(a(-b)) \cdot \vec{v} \text{ (ejercicio 30)} \\ &= (-a)(-b) \cdot \vec{v} \end{aligned} \right.$$

35. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ y todo vector $\vec{v}$: $\quad z_1 \cdot z_2\vec{v} = z_1 z_2 \cdot \vec{v}$

36. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ y todo vector $\vec{v}$:

$$z_1 \cdot z_2\vec{v} = z_1 z_2 \cdot \vec{v} = z_2 z_1 \cdot \vec{v} = z_2 \cdot z_1\vec{v}$$

En particular $\quad z_1 \cdot z_2\vec{v} = z_2 \cdot z_1\vec{v}$

37. La fórmula

$$z_1 z_2 \cdot \vec{v} = z_1 \cdot z_2 \vec{v} \text{ (para todo } z_1, z_2 \in \mathbf{Z} \text{ y todo } \vec{v} \in \mathbf{V}),$$

permite **definir**:

$$z_1 z_2 \vec{v} = z_1 z_2 \cdot \vec{v} = z_1 \cdot z_2 \vec{v}$$

38. Completa:

$2\,\mathbf{Z} \cdot \vec{v} = \{ \blacksquare \}$ donde $\vec{v} \in \Pi_o$ y $k \in \omega$

$3\,\mathbf{Z} \cdot \vec{v} = \{ \blacksquare \}$ ¡y dibuja!

$k\,\mathbf{Z} \cdot \vec{v} = \{ \blacksquare \}$

39. Completa:

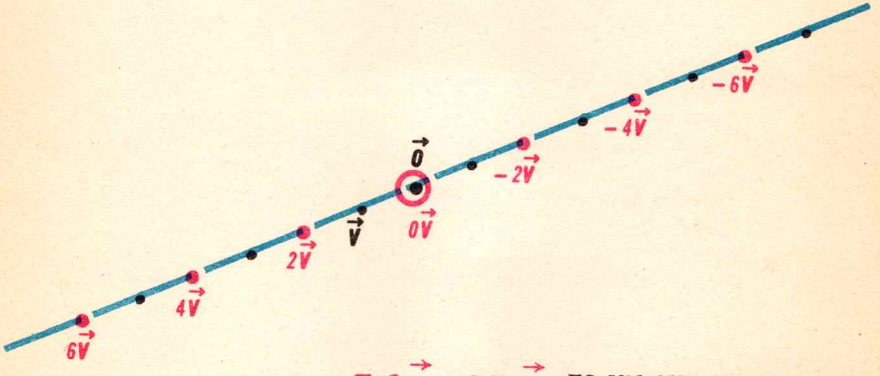
$\mathbf{Z} \cdot 2\vec{v} = \{ \blacksquare \}$ donde $\vec{v} \in \Pi_o$ y $k \in \omega$

$\mathbf{Z} \cdot 3\vec{v} = \{ \blacksquare \}$ ¡y dibuja!

$\mathbf{Z} \cdot k\vec{v} = \{ \blacksquare \}$

40. Si $\vec{v} \in \Pi_o$ y $k \in \omega$ **Entonces** $\mathbf{Z} \cdot k\vec{v} = k\,\mathbf{Z} \cdot \vec{v}$

41. $\vec{v} \in \Pi_o$ y $k \in \omega$ **Entonces** $\mathbf{Z}.k\vec{v}$ es un sub-grupo de $\mathbf{Z}\vec{v}, +$.



$\mathbf{Z}.2\vec{v} = 2\,\mathbf{Z}.\vec{v}$ ES UN SUB-GRUPO DE $\mathbf{Z}\vec{v}, +$

FIG. 20

42. **Si** $o \neq v \in \Pi$ y $k \in \omega$ **Entonces** $kZ.\vec{v}$ es un sub-grupo de $Z\vec{v}, +$,

$Z\vec{v}$ es un sub-grupo de ov, $+$,

ov es un sub-grupo de Π_o, $+$.

43. Explica la expresión:

$$\{\vec{o}\}, \quad 2Z.\vec{v}, \quad Z\vec{v}, \quad ov, \quad \Pi_o$$

es una sucesión **ascendente** de sub-grupos de Π_o, $+$

44. Para todo $k \in Z$ y todo $\vec{u} \in V$:

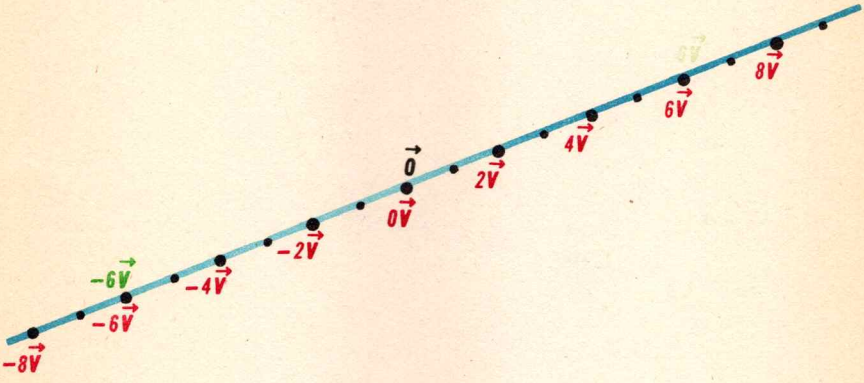
$$Z.k\vec{u} = k.Z\vec{u} \text{ es un sub-grupo de } Z\vec{u}, +.$$

45. Si $k_1, k_2 \in \omega$ y $\vec{v} \in \Pi_o$,

Entonces $Z.k_1, k_2\vec{v}$ es un sub-grupo de $Z.k_2\vec{v}$, $+$

46. Si $k_1, k_2 \in \omega$, $k_1 | k_2$ y $\vec{v} \in \Pi_o$,

Entonces $Z.k_2\vec{v}$ es un sub-grupo de $Z.k_1\vec{v}$, $+$



$Z.6\vec{v}$ ES UN SUB-GRUPO

DE $Z.2\vec{v}$

FIG. 21

47. He aquí un vector $\vec{v} \neq \vec{o}$.

Sabes que ov es un sub-grupo de Π_o , +.

Sabes que $\mathbf{Z}\vec{v}$ es un sub-grupo de ov, +.

Construye un sub-grupo S_1 de $\mathbf{Z}\vec{v}$, + con $\{\vec{o}\} \neq S_1 \neq \mathbf{Z}\vec{v}$

Construye un sub-grupo S_2 de S_1, + con $\{\vec{o}\} \neq S_2 \neq S_1$

Construye un sub-grupo S_3, etc.

Habrás construido de esta manera una sucesión descendente infinita de sub-grupos de Π_o, +.

$$\Pi_o,\ o\,v,\ \mathbf{Z}\vec{v},\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \text{etc.}$$

$$\Pi_o \supset o\,v \supset \mathbf{Z}\vec{v} \supset S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \text{etc.}$$

$$\Pi_o \neq o\,v \neq \mathbf{Z}\vec{v} \neq S_1 \neq S_2 \neq S_3 \neq \text{etc.}$$

48. Aquí, una sucesión descendente de sub-grupos de $\mathbf{Z}\vec{v}$ (donde $\vec{o} \neq \vec{v} \in \Pi_o$)

$$\mathbf{Z}\vec{v} \supset \mathbf{Z}\cdot 2\vec{v} \supset \mathbf{Z}\cdot 4\vec{v} \supset \mathbf{Z}\cdot 8\vec{v} \supset \mathbf{Z}\cdot 16\vec{v} \supset \ldots$$

Construye varias sucesiones descendentes de sub-grupos de $\mathbf{Z}\vec{v}$, +.

49. Calcula: $\mathbf{Z}\cdot 12\vec{v} \cap \mathbf{Z}\cdot 18\vec{v}$

50. He aquí $\vec{a}, \vec{b} \in D_o$, +

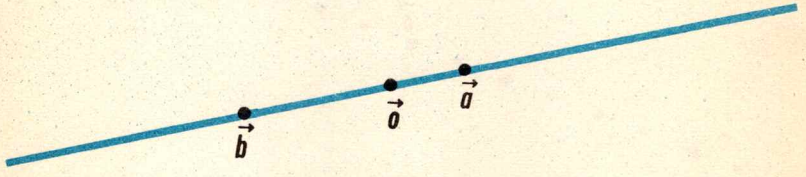


FIG. 22

¿Quieres construir $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tales que

$$\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} \qquad \vec{b} - \vec{u} = \vec{a} - 2\vec{u}$$

$$\vec{b} = \vec{y} - \vec{a} \qquad 2\vec{a} + \vec{v} = -\vec{b}$$

$$\vec{a} - \vec{z} = \vec{b} \qquad \vec{w} - \vec{a} - \vec{b} = \vec{o}$$

$$\vec{t} + \vec{a} = 2\vec{t}$$

2

El grupo ordenado D_o , + , $\leqslant$

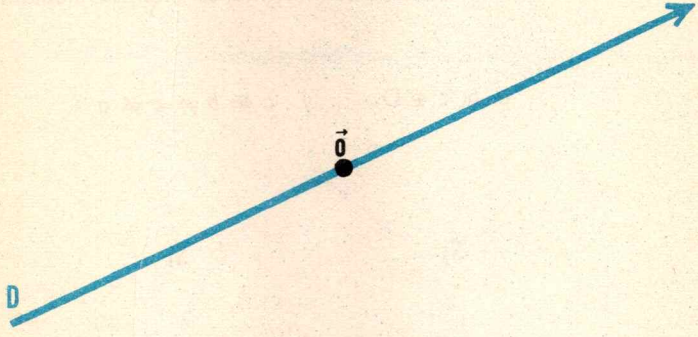
1 — FINALIDAD DE ESTE CAPÍTULO

Toda recta punteada D_o se convierte en un **grupo conmutativo** D_o, +.

Toda recta D puede estar **orientada,** es decir, provista de un orden total natural:

D, $\leqslant$ (MM1, C. 11, § 3).

En este capítulo pondremos en evidencia la vinculación existente entre el grupo (conmutativo) y la relación de orden (total) de una recta punteada orientada D_o, +, $\leqslant$.



D_o , + , $\leqslant$

RECTA ORIENTADA PUNTEADA

FIG. 23

2 — RECTAS ORIENTADAS

AXIOMA II 6

Toda recta D está naturalmente provista de dos órdenes totales recíprocos.

MM1, p. 169)

Orientar la recta D es designar con $\leqslant$ uno de sus órdenes naturales.

La **recta orientada** se anota D, $\leqslant$.

— ¿Quieres recordarnos qué se entiende por orden de un conjunto?

— Se llama **orden de un conjunto** a toda relación definida en dicho conjunto, que sea a la vez 1º *reflexiva*, 2º *transitiva*, 3º *antisimétrica*.

Si $x, y, z \in D, \leqslant$

Entonces 1º $x \leqslant x$ **(reflexividad),**

2º $x \leqslant y \leqslant x \Longrightarrow x = y$ **(antisimetría),**

3º $x \leqslant y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$ **(transitividad).**

La relación $\leqslant$ es un **orden total** porque:

4º $x \leqslant y \quad o \quad y \leqslant x$ **(totalidad).**

Traduce estas propiedades en el lenguaje de esquemas.

— 1º **reflexividad:** un bucle en cada punto;

2º **antisimetría:** entre dos puntos distintos de D, jamás ida y vuelta;

3º teniendo en cuenta 2º, la **transitividad** se expresa mediante el blasón:

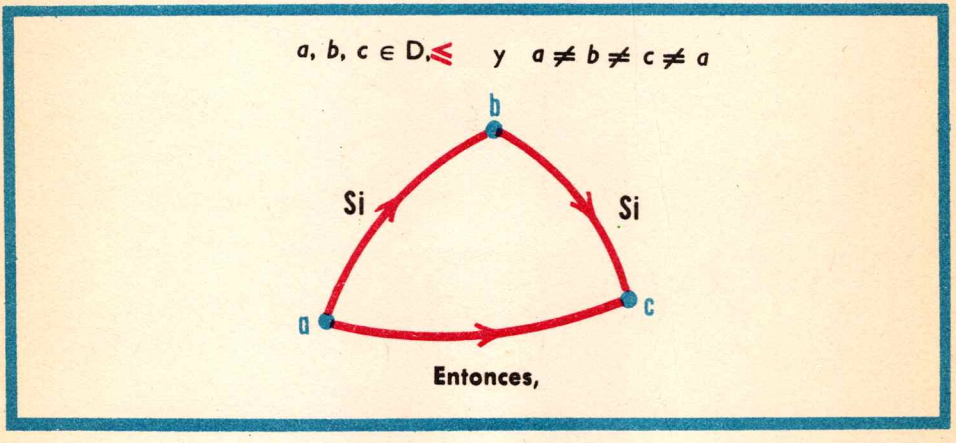


FIG. 24

4º **totalidad:** dos puntos distintos de D están siempre vinculados por una flecha.

3 — "ORDEN ESTRICTO"

He aquí una recta orientada D, $\leqslant$.

Según vimos en MM1, el orden $\leqslant$ y el "orden estricto" $<$ están vinculados por las siguientes fórmulas, que son por otra parte equivalentes:

para todo $x, y \in D$:

(1) $\boxed{x < y} \iff \boxed{x \leqslant y \quad y \quad x \neq y}$

(2) $\boxed{x \leqslant y} \iff \boxed{x < y \quad o \quad x = y}$

Suprimiendo todos los bucles de un esquema de $\leqslant$ se obtiene un esquema de $<$, de donde resulta de inmediato que la relación $<$ es **antirreflexiva, transitiva y antimétrica.**

EJERCICIOS

1. Un "orden estricto" no es un orden.

   Es por ello que pusimos las comillas.

2. Si $x, y, z \in D, \leqslant$ **Entonces** $x < y < z \implies x < z$

4 — ORDEN Y "ORDEN ESTRICTO"

En este parágrafo, todas las letras minúsculas designan puntos de la recta orientada D, $\leqslant$.

1. $\boxed{x < y \leqslant z} \Longrightarrow \boxed{x < z}$

DEMOSTRACIÓN:

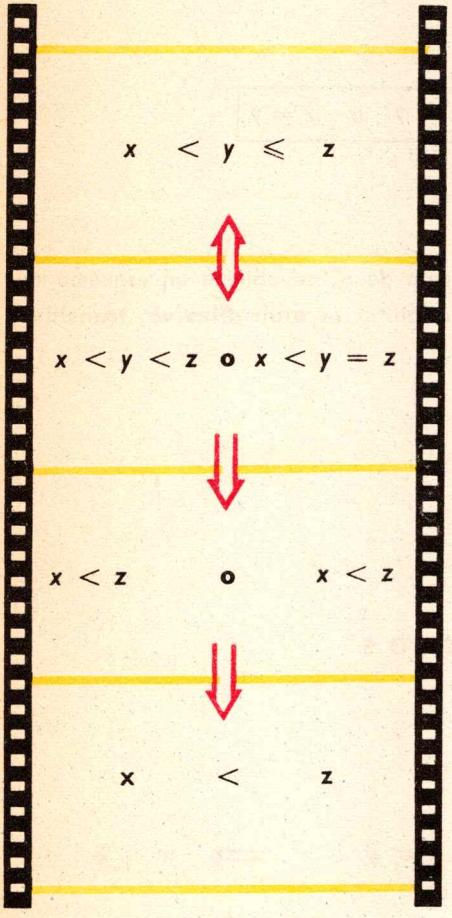


FIG. 25

2. Demuestra que: $x \leqslant y < z \implies x < z$

3. $x \leqslant y \leqslant z < u \implies x < u$

DEMOSTRACIÓN:

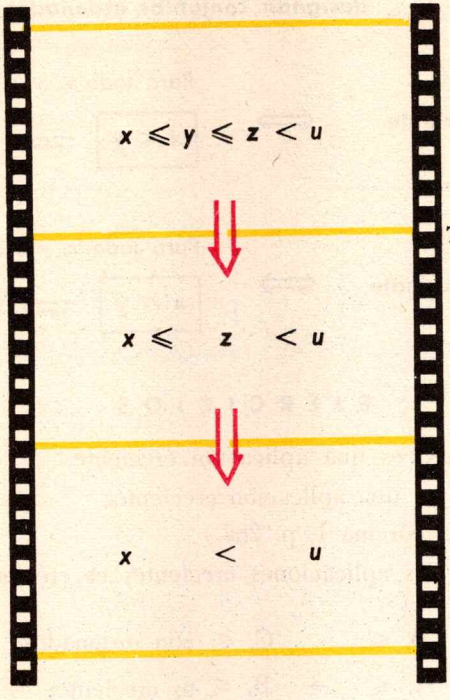


FIG. 26

4. Demuestra que: $x \leqslant y < z \leqslant u \implies x < u$

5. Demuestra que: $x \leqslant y \leqslant z \leqslant u \leqslant v < w \leqslant r \leqslant s \leqslant t \implies x < t$

5 — APLICACIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

He aquí conjuntos A, B provistos cada uno de un orden que en cada caso se anota $\leqslant$.

Se dice entonces que A, $\leqslant$ y B, $\leqslant$ son **conjuntos ordenados.**

(Toda recta orientada es un conjunto ordenado.

ω , $\leqslant$ es un conjunto ordenado.)

He aquí una aplicación f de A en B, que anotamos f: A $\rightarrow$ B

de acuerdo con MM1 (C. 12, § 4, p. 188).

Recordemos que para todo $a \in$ A, el término $f(a)$ designa un elemento de B.

DEFINICIÓN:

Si ***A, $\leqslant$ y B, $\leqslant$ designan conjuntos ordenados y f: A $\rightarrow$ B,***

Entonces

f creciente $\Longleftrightarrow$ Para todo $x, y \in$ A: $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

f decreciente $\Longleftrightarrow$ Para todo $x, y \in$ A: : $x \leqslant y \Longrightarrow f(y) \leqslant f(x)$

EJERCICIOS

1. $\omega \rightarrow \omega : x \rightarrow x + 5$ es una aplicación creciente.
2. $\omega \rightarrow \omega : x \rightarrow 2x$ es una aplicación creciente.
   (Ver MM1, C. 18, teorema 1, p. 282.)
3. La compuesta de dos aplicaciones crecientes es creciente. Dicho de otro modo:

Si A, $\leqslant$; B, $\leqslant$; C, $\leqslant$ son ordenados;
f : A, $\leqslant$ $\rightarrow$ B, $\leqslant$ es creciente;
g : B, $\leqslant$ $\rightarrow$ C, $\leqslant$ es creciente,
Entonces $g \circ f$: A, $\leqslant$ $\rightarrow$ C, $\leqslant$ es creciente;

4. $\omega \rightarrow \omega$: $x \rightarrow 2x + 5$ es creciente;
5. $\omega \rightarrow \omega$: $x \rightarrow 4x + 10$ es creciente;
6. $\omega \rightarrow \omega$: $x \rightarrow 8x + 15$ es creciente;
7. $\omega \rightarrow \omega$: $x \rightarrow x^2$ es creciente.

(Ver MM1, C. 18, teorema 1, p. 282.)

6 — ORDEN Y PROYECCIÓN PARALELA

AXIOMA Π 8

Si *A,* $\leqslant$ *y B,* $\leqslant$ *son rectas orientadas,*

Entonces *toda proyección paralela p: A* $\rightarrow$ *B es* { *creciente* o *decreciente* }

MM1, p. 227

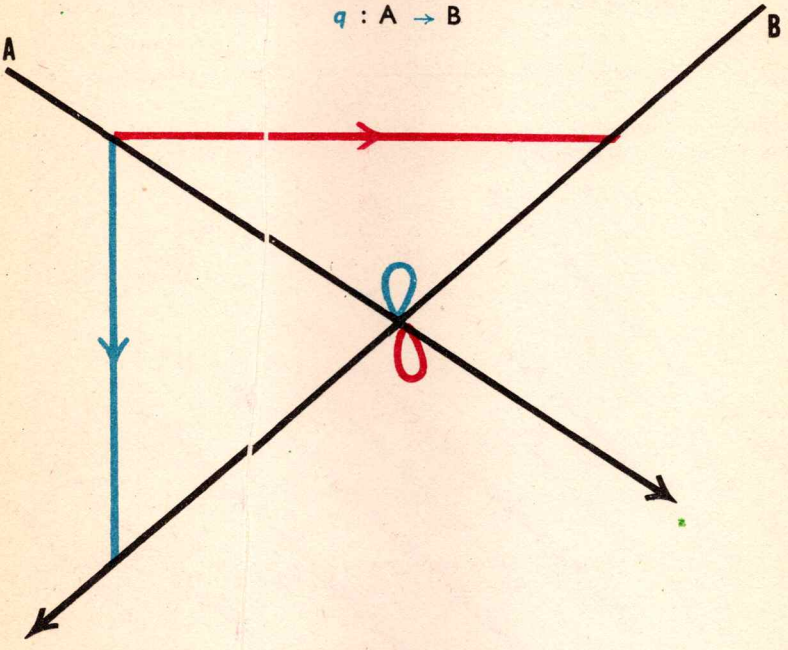
Si las rectas orientadas A, $\leqslant$ y B, $\leqslant$ son secantes.

Entonces existen proyecciones paralelas crecientes

$p: A \rightarrow B$

y proyecciones paralelas decrecientes.

$q: A \rightarrow B$



LA PROYECCIÓN PARALELA $p: A \rightarrow B$ ES CRECIENTE

LA PROYECCIÓN PARALELA $q: A \rightarrow B$ ES DECRECIENTE

FIG. 27

El caso de rectas orientadas paralelas se considera en la segunda parte del axioma Π 8.

AXIOMA II 8

Si

Las rectas orientadas A, $\leqslant$ y B, $\leqslant$ son paralelas,

Entonces

o bien	***o bien***
Todas las proyecciones paralelas A→B	***Todas las proyecciones paralelas A→B***
son	*son*
crecientes	***decrecientes***
Se dice entonces que	*Se dice entonces que*
Las rectas orientadas A, $\leqslant$ y B, $\leqslant$	***Las rectas orientadas A, $\leqslant$ y B, $\leqslant$***
tienen	*tienen*
el mismo sentido	***sentidos opuestos***
	(o contrarios)

Todas las rectas orientadas rojas tienen el mismo sentido.

Todas las rectas orientadas verdes tienen el mismo sentido.

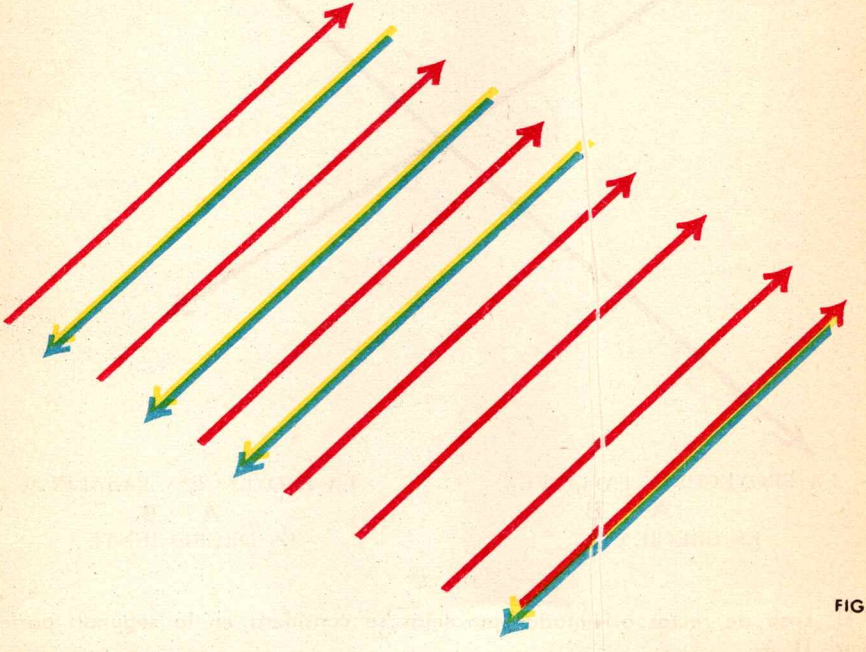


FIG. 28

Una recta orientada roja y una recta orientada verde tienen sentidos opuestos.

7 — ADICIÓN Y "ORDEN ESTRICTO"

PROPOSICIÓN 1

Si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *pertenecen a la recta orientada punteada* D_o, $+$, $\leqslant$

Entonces $\boxed{\vec{x} < \vec{y}} \iff \boxed{\vec{x} + \vec{z} < \vec{y} + \vec{z}}$

DEMOSTRACIÓN: 1º Probemos primero que $\boxed{\vec{x} < \vec{y} \Longrightarrow \vec{x} + \vec{z} < \vec{y} + \vec{z}}$

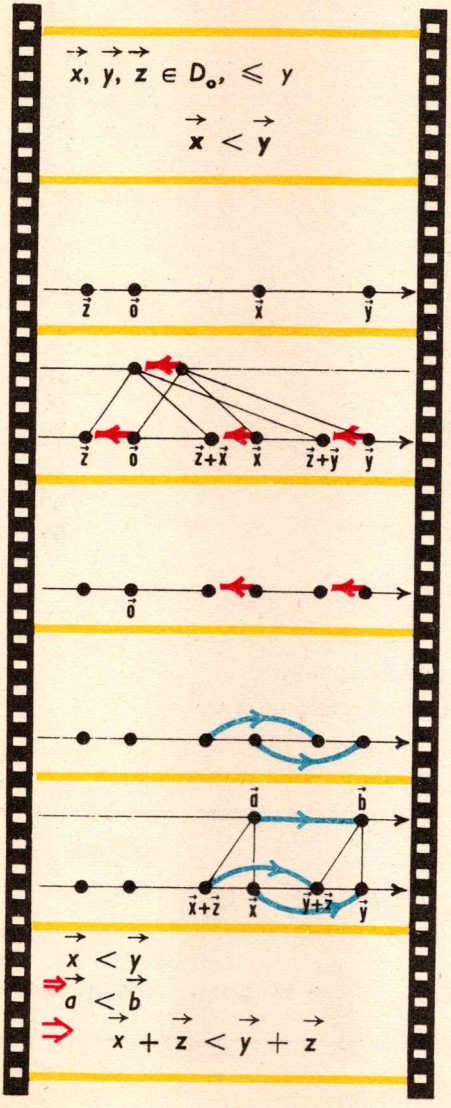


FIG. 29

2º Falta probar que

$$\vec{x} + \vec{z} < \vec{y} + \vec{z} \implies \vec{x} < \vec{y}$$

Es suficiente aplicar la fórmula establecida en 1º

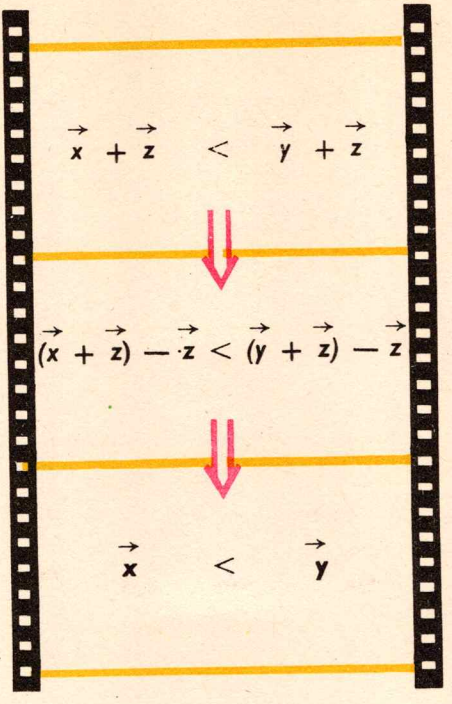


FIG. 30

La **triple propiedad**

1. D_o, + es un grupo conmutativo.
2. D, $\leqslant$ es un conjunto totalmente ordenado
3. Para todo $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in D_o$: $\vec{x} < \vec{y} \iff \vec{x} + \vec{z} < \vec{y} + \vec{z}$

se expresa brevemente en el

TEOREMA

D_o, +, $\leqslant$ es un grupo conmutativo ordenado

8 — ADICIÓN Y ORDEN

PROPOSICIÓN 2

Si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *pertenecen a la recta punteada orientada* D_u, $+$, $\leqslant$

Entonces $\boxed{\vec{x} \leqslant \vec{y}} \iff \boxed{\vec{x} + \vec{z} \leqslant \vec{y} + \vec{z}}$

DEMOSTRACIÓN:

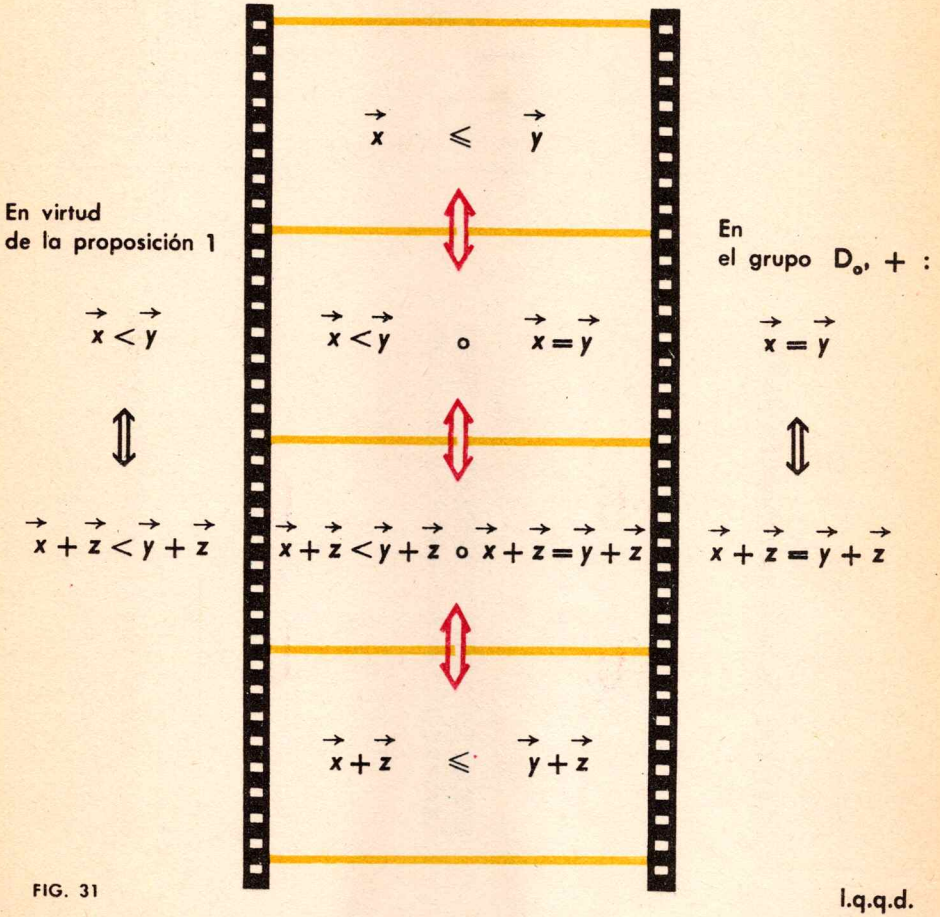


FIG. 31

l.q.q.d.

9 — CÁLCULO EN EL GRUPO ORDENADO D_o , + , $\leqslant$

PROPOSICIÓN 3

Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ *pertenecen a la recta orientada punteada* D_0, +, $\leqslant$

Entonces 1º $\quad \vec{a} < \vec{b}$ y $\vec{c} < \vec{d} \implies \vec{a} + \vec{c} < \vec{b} + \vec{d}$

2º $\quad \vec{a} \leqslant \vec{b}$ y $\vec{c} \leqslant \vec{d} \implies \vec{a} + \vec{c} \leqslant \vec{b} + \vec{d}$

3º $\quad \vec{a} < \vec{b}$ y $\vec{c} \leqslant \vec{d} \implies \vec{a} + \vec{c} < \vec{b} + \vec{d}$

4º $\quad \vec{a} \leqslant \vec{b}$ y $\vec{c} < \vec{d} \implies \vec{a} + \vec{c} < \vec{b} + \vec{d}$

DEMOSTRACIÓN:

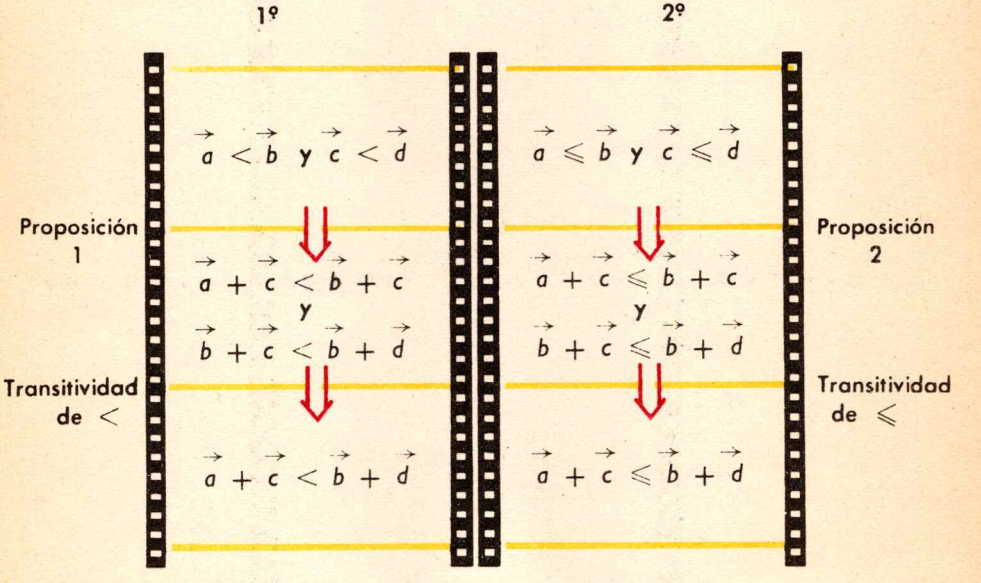


FIG. 32

3º

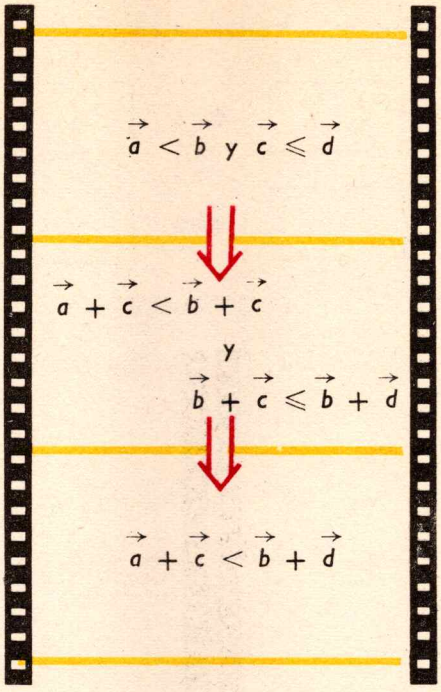


FIG. 33

4º

Se te da $\vec{c} < \vec{d}$ y $\vec{a} \leqslant \vec{b}$

Aplica la tercera implicación de la proposición.

Obtienes $\vec{c} + \vec{a} < \vec{d} + \vec{b}$

o, teniendo en cuenta la conmutatividad de la adición, $\vec{a} + \vec{c} < \vec{b} + \vec{d}$

l.q.q.d.

PROPOSICIÓN 4

Si $\vec{a}, \vec{b}$ *pertenecen a la recta orientada punteada* D_u, $+$, $\leqslant$

Entonces 1° $\vec{a} < \vec{b} \iff -\vec{b} < -\vec{a}$

2° $\vec{a} \leqslant \vec{b} \iff -\vec{b} \leqslant -\vec{a}$

DEMOSTRACIÓN:

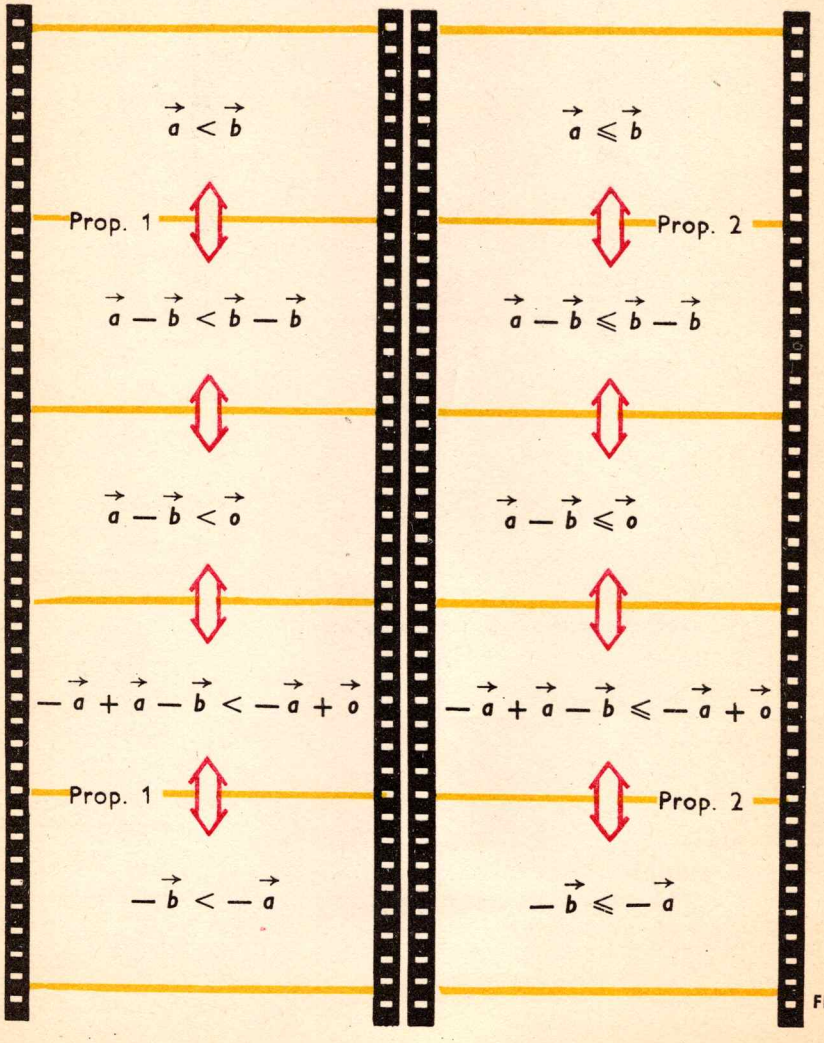


FIG. 34

10 — MULTIPLICACIÓN POR UN ENTERO RACIONAL EN EL GRUPO D_o, +, $\leqslant$

- Si $\vec{a}, \vec{b} \in D_o, +, \leqslant$ y $n \in \omega_o$

Entonces (prop. 3, 1°) (prop. 3, 2°)

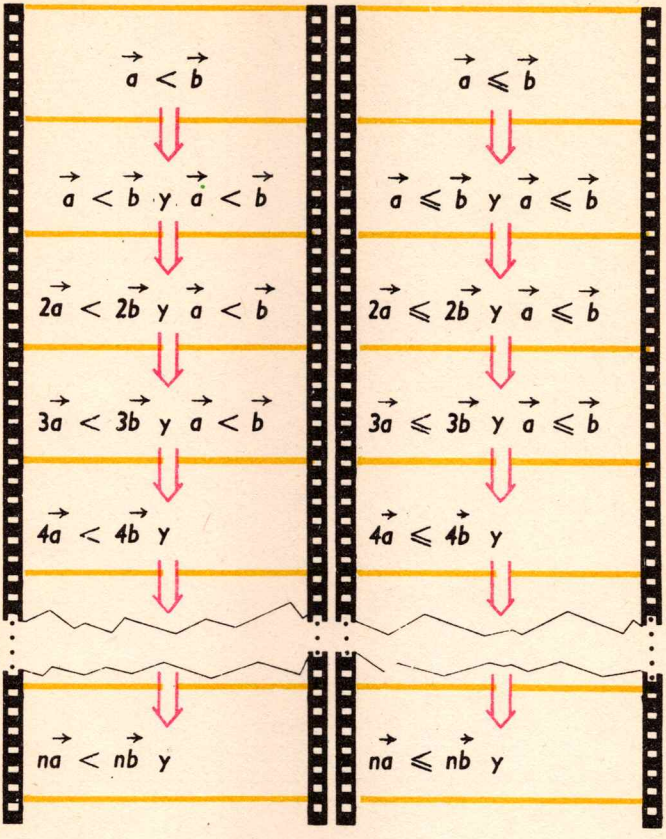


FIG. 35

Hemos probado que

Si $\vec{a}, \vec{b} \in D_o, +, \leqslant$ y $n \in \omega_o$

Entonces A) $\vec{a} < \vec{b} \implies n\vec{a} < n\vec{b}$

B) $\vec{a} \leqslant \vec{b} \implies n\vec{a} \leqslant n\vec{b}$

- He aquí un natural no nulo $n \in \omega_o$

  y $\vec{a}, \vec{b} \in D_o, +, \leqslant$

  Si $\vec{na} < \vec{nb}$

  Entonces ¿qué se puede decir de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

o bien $\vec{b} \leqslant \vec{a}$ **o bien** $\vec{a} < \vec{b}$

Pero entonces, en virtud de la proposición B

$$\vec{nb} \leqslant \vec{na}$$

lo cual es imposible, puesto que

$$\vec{na} < \vec{nb}$$

Luego

$$\vec{a} < \vec{b}$$

Hemos establecido que

Si $\vec{a}, \vec{b}, \in D_o, +, \leqslant$ y $n \in \omega_o$

Entonces C) $\vec{na} < \vec{nb} \implies \vec{a} < \vec{b}$

Probarás también que

Si $\vec{a}, \vec{b} \in D_o, +, \leqslant$ y $n \in \omega_o$

Entonces D) $\vec{na} \leqslant \vec{nb} \implies \vec{a} \leqslant \vec{b}$

10. MULTIPLICACIÓN POR UN ENTERO RACIONAL EN EL GRUPO $D_o, +, \leqslant$

- **PROPOSICIÓN 5**

Si $\vec{a}, \vec{b} \in D_o, +, \leqslant$ y $n \in \omega_o$

Entonces

1°

$$\vec{a} < \vec{b} \iff n\vec{a} < n\vec{b} \iff (-n)\vec{b} < (-n)\vec{a}$$

2°

$$\vec{a} \leqslant \vec{b} \iff n\vec{a} \leqslant n\vec{b} \iff (-n)\vec{b} \leqslant (-n)\vec{a}$$

DEMOSTRACIÓN:

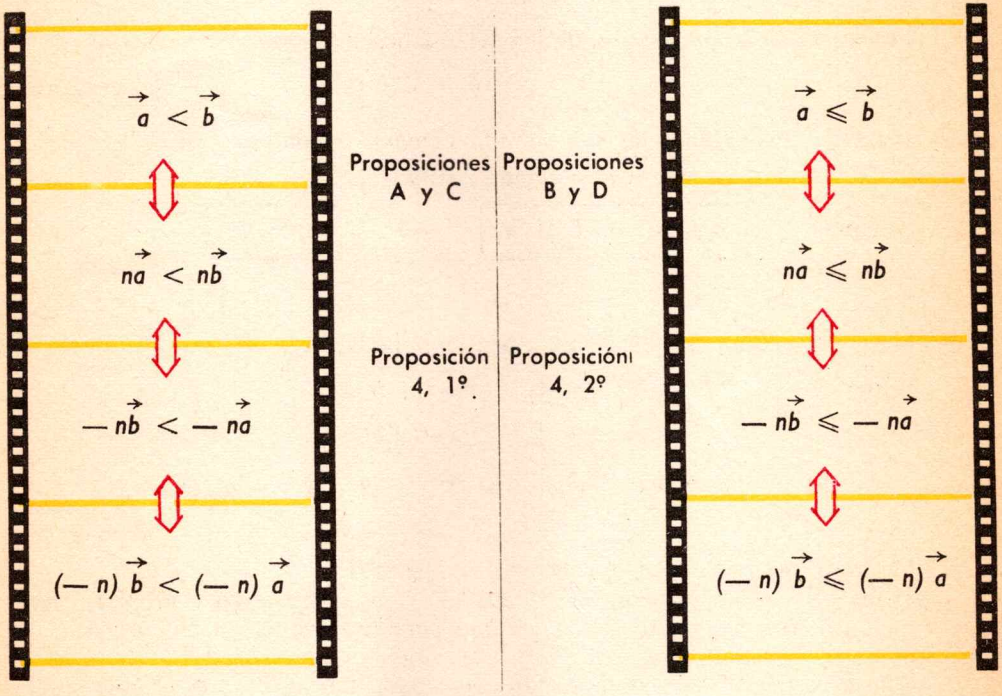


FIG. 36

l.q.q.d.

11 — EJERCICIOS

1. **Si** a, b pertenecen a la recta orientada D, $\leqslant$
Entonces una y solo una de las eventualidades

$$a < b \qquad a = b \qquad b < a$$

es verdadera.

2. **Si** a, b pertenecen a la recta orientada D, $\leqslant$
Entonces una y solo una de las dos eventualidades

$$a \leqslant b \qquad b < a$$

es verdadera.

3. **Si** a, b pertenecen a la recta orientada D, $\leqslant$
Entonces una y solo una de las dos eventualidades

$$a < b \qquad b \leqslant a$$

es verdadera.

4. **Si** a, b pertenecen a la recta orientada D, $\leqslant$
Entonces por lo menos una de las eventualidades

$$a \leqslant b \qquad b \leqslant a$$

es verdadera.

Estas dos eventualidades son simultáneamente verdaderas **ssi** $a = b$.

5. **Si** a, b pertenecen a la recta orientada D, $\leqslant$
Entonces $\boxed{a \leqslant b \text{ y } b \leqslant a} \iff \boxed{a = b}$

6. **Si** a, b pertenecen a la recta orientada D, $\leqslant$
Entonces

$$a \not< b \iff b \leqslant a$$
$$a \not\leqslant b \iff b < a$$
$$a \not< b \text{ et } b \not< a \iff a = b$$

7. He aquí una recta orientada D, $\leqslant$ y a, b, $c \in$ D.
Utilizando exclusivamente los signos $=$ y $<$, pusimos en evidencia (ejercicio 1) tres eventualidades, tales que para toda cupla (a, b) una sola de ellas es verdadera.
Enumera trece eventualidades tales que para todo a, b, $c \in D$, una y solo una de ellas sea verdadera.
Enumera 75 eventualidades tales que una sola de ellas sea verdadera, para todo a, b, c, $d \in$ D.

8. En una recta orientada D, $\leqslant$

$$a < b \Rightarrow a \neq b$$
$$a < b < c \Rightarrow a \neq b \neq c \neq a$$
$$a < b < c \Rightarrow \text{los puntos } a, b, c \text{ son distintos dos a dos.}$$
$$a < b < c < d \Rightarrow \text{los puntos } a, b, c, d \text{ son distintos dos a dos.}$$
$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots \Rightarrow \text{los puntos } a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \text{ son distintos dos a dos.}$$
$$\ldots < b_m < \ldots < b_2 < b_1 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n < \ldots \Rightarrow \text{los } a_i \text{ y los } b_j \text{ son distintos dos a dos.}$$

9. **Si** $\vec{a}$ pertenece a la recta orientada punteada D_0, $+$, $\leqslant$

Entonces la *permutación* $D_0 \to D_0$: $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$ es creciente.

(*Permutación:* ver MM1, C. 13, p. 205.)

10. **Si** D_0, $\leqslant$ es una recta orientada,

Entonces la simetría central: $D_0 \to D_0$: $\vec{x} \to -\vec{x}$ es decreciente.

11. **Si** f: A_0, $\leqslant \to B_0$, $\leqslant$ y g: B_0, $\leqslant \to C_0$, $\leqslant$ son funciones crecientes

Entonces g o f es creciente.

12. La compuesta de una función creciente y de una función decreciente es una función decreciente.

13. La compuesta de dos funciones decrecientes es creciente.

14. **Si** $\vec{a}$ pertenece a la recta orientada punteada D_0, $+$, $\leqslant$

Entonces $D_0 \to D_0$ $\vec{x} \to \vec{a} - \vec{x}$ es decreciente.

15. En el texto se han definido implícitamente los grupos conmutativos ordenados.

¿Quieres formular la definición de grupos conmutativos ordenados?

(Respuesta: ver p. 28.)

16. Sobre una recta punteada orientada se te indica que $\vec{x} + \vec{a} < \vec{b}$.

De allí deduce $\vec{x} <$?

Respondiendo a esta pregunta, habrás resuelto

la **"inecuación"** $\vec{x} + \vec{a} < \vec{b}$

17. Sobre una recta punteada orientada, resuelve las inecuaciones

1. $\vec{a} + \vec{x} > \vec{b}$
2. $\vec{a} - \vec{x} \leqslant \vec{b}$
3. $\vec{x} - \vec{a} < \vec{b}$
4. $\vec{a} - \vec{x} < \vec{b} < \vec{c} - \vec{x}$

18. Sobre una recta punteada orientada D_o, +, $\leqslant$

$\{ \vec{x} \in D_o \mid \vec{x} > \vec{o} \}$ es una semirrecta abierta.

(Ver MM1, C. 11, § 4, p. 170.)

19. D_o, +, $\leqslant$ es una recta punteada orientada y $\vec{a} \in D_o$

Dibuja $A_1 = \{ \vec{x} \in D_o \mid \vec{x} \leqslant \vec{a} \}$ $\quad B_1 = \{ \vec{x} \in D_o \mid \vec{x} < \vec{a} \}$

$A_2 = \{ \vec{x} \in D_o \mid \vec{x} > \vec{a} \}$ $\quad B_2 = \{ \vec{x} \in D_o \mid \vec{x} \geqslant \vec{a} \}$

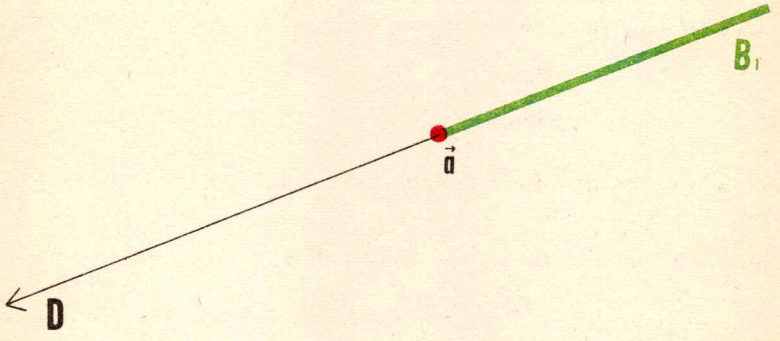


FIG. 37

20. He aquí una recta punteada orientada D_o, +, $\leqslant$ y $\vec{a}, \vec{b} \in D_o$

Si $\quad \vec{a} < \vec{b}$

Entonces

$[a\,b] = \{ \vec{x} \in D_o \mid \vec{a} \leqslant \vec{x} \leqslant \vec{b} \}$ $\quad [a\,b[= \{ \vec{x} \in D_o \mid \vec{a} \leqslant \vec{x} < \vec{b} \}$

$]a\,b[= \{ \vec{x} \in D_o \mid \vec{a} < \vec{x} < \vec{b} \}$ $\quad]a\,b] = \{ \vec{x} \in D_o \mid \vec{a} < \vec{x} \leqslant \vec{b} \}$

(Ver MM1, C. XI, § 5, p. 172.)

21. He aquí una recta punteada orientada D_o, $\dot{+}$, $\leqslant$ y $\vec{a}, \vec{b} \in D_o$ tales que $\vec{a} < \vec{b}$

Dibuja

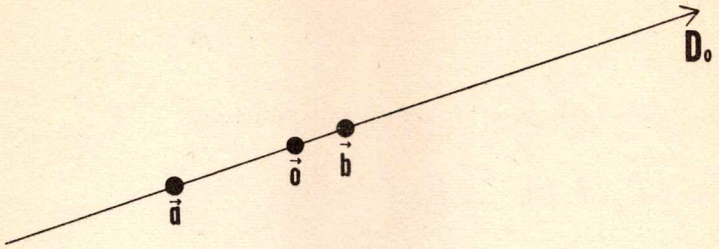


FIG. 38

$$A = \{\vec{x} \in D_o \mid \vec{a} \leqslant \vec{x} + \vec{b}\} \qquad C = \{\vec{x} \in D_o \mid -\vec{a} < \vec{a} - \vec{x}\}$$

$$B = \{\vec{x} \in D_o \mid \vec{b} - \vec{x} - \vec{a} < \vec{o}\} \qquad E = \{\vec{x} \in D_o \mid \vec{x} - \vec{a} < \vec{b} \leqslant -\vec{x} + \vec{a}\}$$

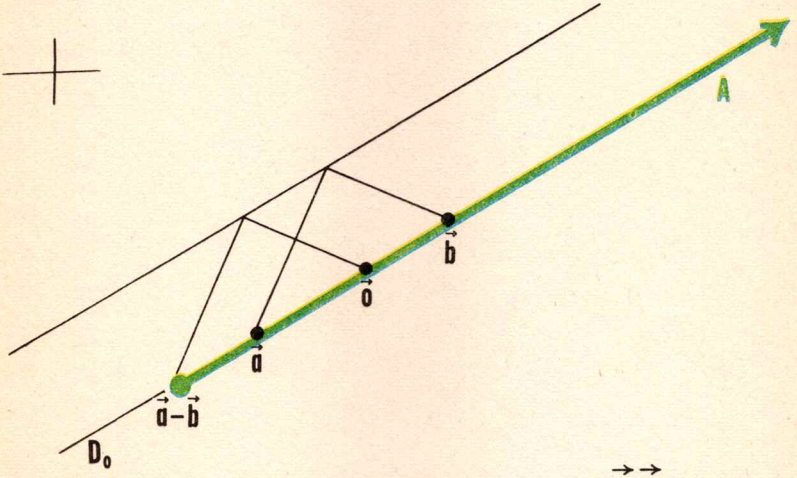


FIG. 39

22. He aquí una recta punteada orientada D_o, $+$ $\leqslant$ y $\vec{a}, \vec{b} \in D_o$ tales que $\vec{a} < \vec{b}$

Si $\quad E = \{\vec{x} \in D_o \mid \vec{x} - \vec{a} < \vec{b} \leqslant -\vec{x} + \vec{a}\}$

$\quad F = \{\vec{x} \in D_o \mid \vec{x} - \vec{a} < \vec{b}\}$

$\quad G = \{\vec{x} \in D_o \mid \vec{b} \leqslant -\vec{x} + \vec{a}\}$

Entonces $\quad E = F \cap G$

23. He aquí una recta punteada orientada $D_0, +, \leqslant$

Si A designa una de las semirrectas cerradas de origen *o* incluidas en D_0

Entonces A es **estable para la adición:**

$$\text{para todo } \vec{x}, \vec{y} \in A : \vec{x} + \vec{y} \in A$$

24. El mismo problema para las semirrectas abiertas.

25. En una recta punteada orientada

1º **Si** $\vec{a} < \vec{x} < \vec{b}$ y $\vec{c} < \vec{y} < \vec{d}$

Entonces $\vec{a} + \vec{c} < \vec{x} + \vec{y} < \vec{b} + \vec{d}$

2º **Si** $\vec{a} \leqslant \vec{x} \leqslant \vec{b}$ y $\vec{c} \leqslant \vec{y} \leqslant \vec{d}$ **Entonces ...**

3º **Si** $\vec{a} < \vec{x} \leqslant \vec{b}$ y $\vec{c} < \vec{y} \leqslant \vec{d}$ **Entonces ...**

4º **Si** $\vec{a} \leqslant \vec{x} < \vec{b}$ y $\vec{c} < \vec{y} \leqslant \vec{d}$ **Entonces ...**

3

Graduaciones de la recta

1 — EL GRUPO ORDENADO $\mathbf{Z}\vec{v}, +, \leqslant$

— He aquí un vector no nulo $\vec{v} \in \Pi_o$

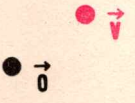


FIG. 40

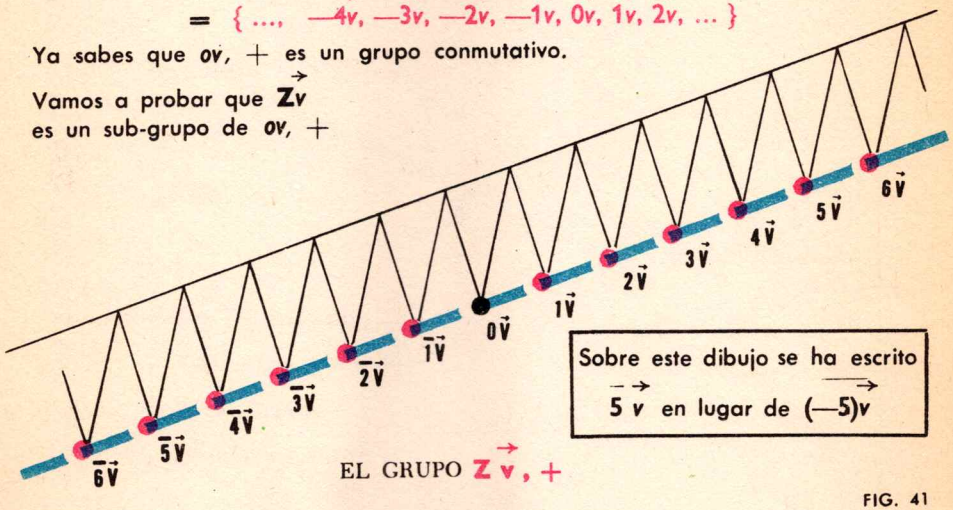
Construye la recta $o\vec{v}$

y el conjunto $\{\ldots, -4\vec{v}, -3\vec{v}, -2\vec{v}, -1\vec{v}, 0\vec{v}, 1\vec{v}, 2\vec{v}, 3\vec{v}, \ldots\}$
que es natural anotar

$$\mathbf{Z}\vec{v} = \{z\vec{v} \mid z \in \mathbf{Z}\}$$
$$= \{\ldots, (-4)\vec{v}, (-3)\vec{v}, (-2)\vec{v}, (-1)\vec{v}, 0\vec{v}, 1\vec{v}, 2\vec{v}, \ldots\}$$
$$= \{\ldots, -4\vec{v}, -3\vec{v}, -2\vec{v}, -1\vec{v}, 0\vec{v}, 1\vec{v}, 2\vec{v}, \ldots\}$$

Ya sabes que $o\vec{v}, +$ es un grupo conmutativo.

Vamos a probar que $\mathbf{Z}\vec{v}$
es un sub-grupo de $o\vec{v}, +$



Sobre este dibujo se ha escrito
$-5\vec{v}$ en lugar de $(-5)\vec{v}$

EL GRUPO $\mathbf{Z}\vec{v}, +$

FIG. 41

PROPOSICIÓN 1

$\vec{Z}\vec{v}, +$ *es un grupo conmutativo.*

DEMOSTRACION:

1º **Si** $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{Z}\vec{v}$, **Entonces** $\vec{x} + \vec{y} \in \vec{Z}\vec{v}$

En efecto: $\vec{x} = z_1 \vec{v}$ con $z_1 \in \mathbf{Z}$

$\vec{y} = z_2 \vec{v}$ con $z_2 \in \mathbf{Z}$

$$\vec{x} + \vec{y} = z_1 \vec{v} + z_2 \vec{v}$$

$$= (z_1 + z_2) \vec{v} \in \mathbf{Z}\vec{v}$$

2º La adición definida en $\vec{Z}\vec{v}$ es asociativa y conmutativa
(¡... puesto que la adición de vectores es asociativa y conmutativa!)

3º $\vec{o} = \vec{0v} \in \vec{Z}\vec{v}$

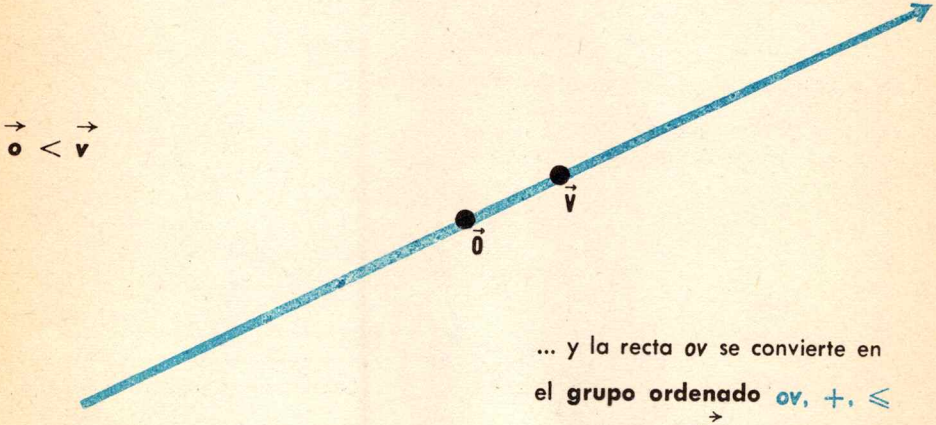
4º **Si** $\vec{x} \in \vec{Z}\vec{v}$, **Entonces** $-\vec{x} \in \vec{Z}\vec{v}$

En efecto: $\vec{x} = z\vec{v}$

$$-\vec{x} = -z\vec{v} = (-z)\vec{v} \in \vec{Z}\vec{v}$$

l.q.q.d.

Orientemos la recta *ov* poniendo $\vec{o} < \vec{v}$



... y la recta *ov* se convierte en
el **grupo ordenado** ov, +, ≤
... y el grupo $\vec{Z}\vec{v}$, + se convierte en
el **grupo ordenado** $\vec{Z}\vec{v}$, +, ≤

FIG. 42

En efecto:

$ov, +, \leqslant$ es un grupo conmutativo ordenado

significa que:

1. $ov, +$ es un grupo conmutativo
2. $\leqslant$ es un orden total de ov
3. Para todo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in ov$:

$$\vec{a} < \vec{b} \Longrightarrow \vec{a} + \vec{c} < \vec{b} + \vec{c}$$

Luego:

1. $\vec{\mathbf{Z}v}, +$ es un grupo conmutativo
2. $\leqslant$ es un orden total de $\vec{\mathbf{Z}v}$
3. Para todo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \vec{\mathbf{Z}v}$:

$$\vec{a} < \vec{b} \Longrightarrow \vec{a} + \vec{c} < \vec{b} + \vec{c}$$

Dicho de otro modo:

$\vec{\mathbf{Z}v}, +, \leqslant$ es un grupo conmutativo ordenado

cosa que nos permite mejorar la

PROPOSICIÓN 1

$\vec{\mathbf{Z}v}, +, \leqslant$ *es un grupo conmutativo ordenado.*

Examinemos la construcción del grupo $\mathbf{Z}_{\vec{v}}, +, \leqslant$

La recta ov está orientada por $\vec{o} < \vec{v}$

Demos el mismo sentido a la paralela P a ov
Todas las proyecciones paralelas

$$ov \to P \text{ y } P \to ov$$

son, por lo tanto, crecientes.

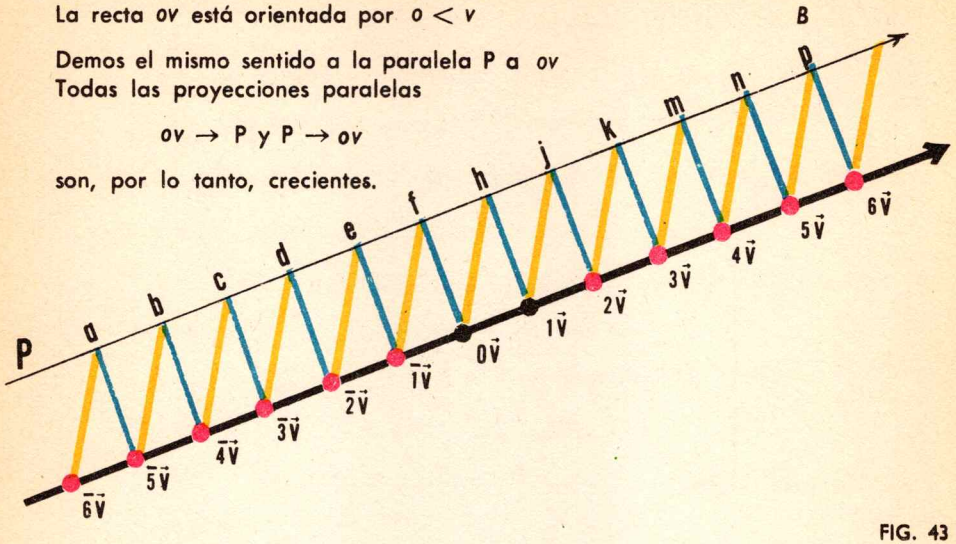


FIG. 43

$$\vec{0v} < \vec{1v} \Longrightarrow h < j \Longrightarrow \vec{1v} < \vec{2v} \Longrightarrow j < k \Longrightarrow \vec{2v} < \vec{3v} \Longrightarrow \ldots$$

$$\vec{0v} < \vec{1v} \Longrightarrow f < h \Longrightarrow \vec{1v} < \vec{0v} \Longrightarrow e < f \Longrightarrow \vec{2v} < \vec{1v} \Longrightarrow \ldots$$

Luego $\ldots < \vec{4v} < \vec{3v} < \vec{2v} < \vec{1v} < \vec{0v} < \vec{1v} < \vec{2v} < \vec{3v} < \vec{4v} < \vec{5v} < \ldots$

EJERCICIOS

Acabamos de establecer que

Si $\vec{v} \in \Pi_o$ es un vector no nulo y la recta ov está orientada por $\vec{o} < \vec{v}$,

Entonces $\ldots < \vec{4v} < \vec{3v} < \vec{2v} < \vec{1v} < \vec{0v} < \vec{1v} < \vec{2v} < \vec{3v} < \vec{4v} < \ldots$

¿Quieres probar esta proposición mediante cálculo, utilizando el hecho de que ov, $+$, $\leqslant$ es un grupo ordenado?

DEMOSTRACIÓN:

$$\vec{o} < \vec{v} \Rightarrow \vec{o} + \vec{v} < \vec{v} + \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} < \vec{2v} \Rightarrow \vec{v} + \vec{v} < \vec{2v} + \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{2v} < \vec{3v} \Rightarrow \vec{2v} + \vec{v} < \vec{3v} + \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{3v} < \vec{4v} \Rightarrow \text{etc.}$$

La demostración no está terminada. Complétala.

2 — ORDEN NATURAL DE Z

He aquí un vector no nulo $\vec{v} \in \Pi_o$

Orientemos la recta ov poniendo $\vec{o} < \vec{v}$

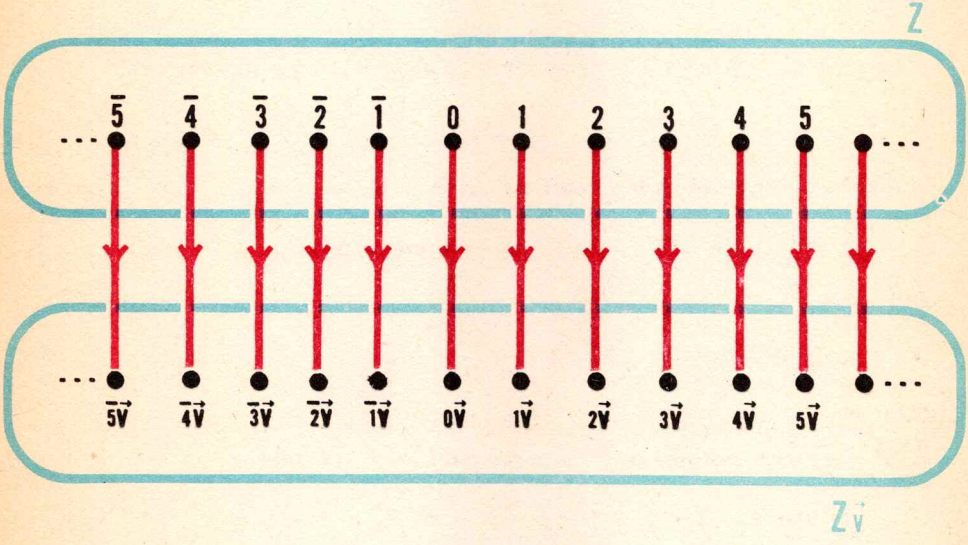
Los términos siguientes designan entonces elementos de $\mathbf{Z}\vec{v}$ distintos dos a dos

$$\ldots \quad \overline{5}\vec{v} \quad \overline{4}\vec{v} \quad \overline{3}\vec{v} \quad \overline{2}\vec{v} \quad \overline{1}\vec{v} \quad 0\vec{v} \quad 1\vec{v} \quad 2\vec{v} \quad 3\vec{v} \quad 4\vec{v} \quad 5\vec{v} \ldots$$

puesto que

$$\ldots < \overline{5}\vec{v} < \overline{4}\vec{v} < \overline{3}\vec{v} < \overline{2}\vec{v} < \overline{1}\vec{v} < 0\vec{v} < 1\vec{v} < 2\vec{v} < 3\vec{v} < 4\vec{v} < 5\vec{v} < \ldots$$

Luego, la aplicación $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\vec{v} : z \to z\vec{v}$ es biyectiva



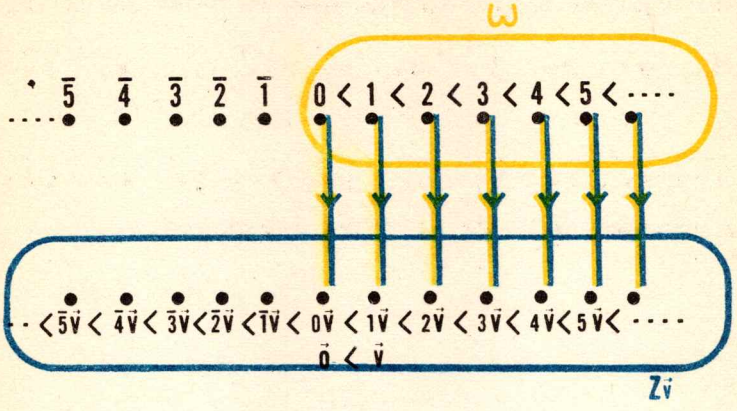
BIYECCIÓN $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\vec{v} : z \to z\vec{v}$

FIG. 44

Sabemos que

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$$

Luego la aplicación $\omega \to \vec{Z}v : n \to \vec{nv}$ es creciente



LA APLICACIÓN $\omega, \leqslant \to \vec{Z}\,\vec{v}, \leqslant$ ES CRECIENTE

FIG. 45

— ¿Quieres **prolongar el orden total de** ω **a Z** de tal manera que la biyección

$\mathbf{Z}, \leqslant \to \vec{Z}v, \leqslant : z \to \vec{zv}$ sea creciente?

— Basta poner

$$\dots < \bar{5} < \bar{4} < \bar{3} < \bar{2} < \bar{1} < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$$

DEFINICIÓN

Se llama ***orden natural de Z*** *al orden total de* **Z** *definido por*

$$\dots < \bar{5} < \bar{4} < \bar{3} < \bar{2} < \bar{1} < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$$

PROPOSICIÓN 2

Si $\vec{o} \neq \vec{v} \in \Pi_o$

y la recta *ov* está orientada por $\vec{o} < \vec{v}$,

Entonces la biyección $\mathbf{Z}, \leqslant \to \vec{Z}v, \leqslant : z \to \vec{zv}$ **es creciente.**

Si $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$

Entonces

$$z_1 \to z_1 \vec{v}$$

$$z_2 \to z_2 \vec{v}$$

$$z_1 + z_2 \to (z_1 + z_2)\vec{v} = z_1\vec{v} + z_2\vec{v}$$

Así,

$\vec{o} \neq \vec{v}$

$\mathbf{Z}, +$ y $\mathbf{Z}\vec{v}, +$ son grupos

$\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\vec{v}$ es una **biyección** que aplica toda suma de elementos de $\mathbf{Z}$ sobre la suma de sus imágenes.

Brevemente:

$\vec{o} \neq \vec{v}$

La aplicación $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\vec{v} : z \to z\vec{v}$ es un **isomorfismo de grupos**

DEFINICIÓN

f es un isomorfirmo del grupo G, * sobre el grupo H, *

ssi

f es una biyección $f: G \to H$ *tal que*

para todo $x, y, \in G : f(x * y) = f(x) * f(y)$

Dos grupos son ***isomorfos ssi*** *existe un isomorfismo que aplica uno sobre el otro.*

Hemos comprobado así, que los grupos $\mathbf{Z}, +$ y $\mathbf{Z}\vec{v}, +$ son isomorfos.

EJERCICIOS

1. $\mathbf{Z}, + \to 2\mathbf{Z}, + : z \to 2z$ es un isomorfismo.

2. $\mathbf{Z}, + \to \mathbf{Z}, + : z \to -z$ es un isomorfismo.

3. $\mathbf{Z}, + \to \mathbf{Z}, + : z \to z$ es un isomorfismo.

4. **Si** $\vec{v}$ es un vector no nulo

   Entonces $\mathbf{Z}\vec{v}, + \rightarrow \mathbf{Z}, + \; : \; z\vec{v} \rightarrow z$ es un isomorfismo.

5. **Si** G, $*$ y H, $*$ son grupos y f: G, $*$ $\rightarrow$ H, $*$ un isomorfismo

   Entonces f^{-1} : H, $*$ $\rightarrow$ G, $*$ es un isomorfismo.

6. La recíproca de un isomorfismo de grupos es un isomorfismo de grupos.

7. **Si** G, $*$ es un grupo

   Entonces $1_G : G \rightarrow G : x \rightarrow x$ es un isomorfismo. G, $*$ $\rightarrow$ G, $*$.

8. **Si** A, $*$; B, $*$; C, $*$ son grupos

   y f: A, $*$ $\rightarrow$ B, $*$; g: B, $*$ $\rightarrow$ C, $*$ son isomorfismos

   Entonces $g \circ f$: A, $*$ $\rightarrow$ C, $*$ es un isomorfismo.

9. La compuesta de dos isomorfismos de grupos
   es un isomorfismo de grupos.

10. **Si** G, $*$ es un grupo conmutativo,

    Entonces G, $*$ $\rightarrow$ G, $*$: $g \rightarrow \bar{g}$ es un isomorfismo.

11. **Si** G, $*$ es un grupo y $a, b \in$ G,

    Entonces $a * b * \bar{b} * \bar{a} = v = \bar{b} * \bar{a} * a * b$.

12. He aquí un grupo G, $*$ y $a, b \in$ G.
    – ¿Cómo se anota el simétrico de $a \in$ G?
    – El simétrico del elemento $a \in$ G se anota $\bar{a}$.
    – $a * b$ es un elemento de G.
    ¿Cómo anotas el simétrico del elemento $a * b$ de G?
    – El simétrico del elemento $a * b$ de G se anota $\overline{a * b}$.
    – Utilizando el resultado obtenido en el ejercicio 11, quieres probar que

$$\overline{a * b} = \bar{b} * \bar{a}$$

13. He aquí un conjunto de dos objetos

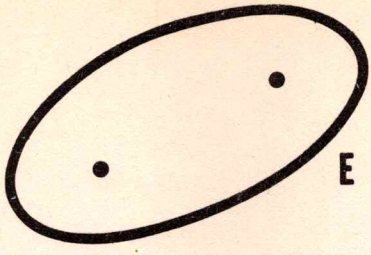
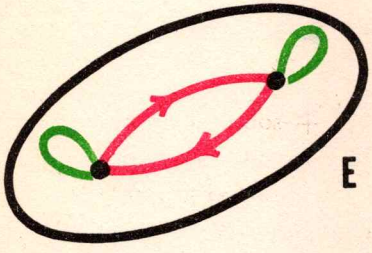


FIG. 46

Llama $\mathfrak{S}$ al conjunto de permutaciones de E



$\mathfrak{S} = \{ \bullet, \bullet \}$

FIG. 47

Ya sabes que $\mathfrak{S}$, o es un grupo. Construye su tabla de composición.

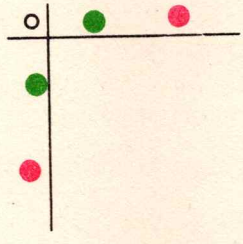


FIG. 48

14. El conjunto $I = \{ 1, -1 \} \subset Z$ es un grupo para la multiplicación. Construye la tabla de multiplicación de este grupo.

15. La biyección $f : \mathfrak{S} \to I$:

$$\bullet \to 1 \quad ; \quad \bullet \to -1$$

es un isomorfismo del grupo $\mathfrak{S}$, o sobre el grupo I,.

$$f : \mathfrak{S}, o \to I, \cdot$$

16. Si $\mathfrak{S}$, o es el grupo de permutaciones de $\{1, 2, 3\}$

Entonces $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S} : f \to f^{-1}$ no es un isomorfismo. $\mathfrak{S}$, o $\to$ $\mathfrak{S}$, o.

17. $V, + \to V, + \quad : \quad \vec{v} \to -\vec{v}$ es un isomorfismo

18. Si $\vec{v} \neq \vec{o}$ y $\vec{w} \neq \vec{o}$,

Entonces los grupos $\mathbf{Z}\vec{v}, +$ y $\mathbf{Z}\vec{w}, +$ son isomorfos.

19. Si $\vec{v} \neq \vec{o}$,

Entonces los grupos $\mathbf{Z}\vec{v}, +$ y $\mathbf{Z}\vec{o}, +$ no son isomorfos.

20. La biyección $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad : \quad z \to z + 1$

no es un isomorfismo $\mathbf{Z}, + \to \mathbf{Z}, +$

21. La biyección $3\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad : \quad 3z \to z + 1$

no es un isomorfismo del grupo $3\mathbf{Z}, +$ sobre el grupo $\mathbf{Z}, +$

22 Si los grupos A, $*$ y B, $*$ son isomorfos al grupo G, $*$

Entonces A, $*$ y B, $*$ son isomorfos.

3 — EL GRUPO ORDENADO Z, +, ⩽

Sabemos que $\mathbf{Z}, +$ es un grupo conmutativo y que $\mathbf{Z}$ está provisto de un orden total $\leqslant$

PROPOSICIÓN 3

$\mathbf{Z}, +, \leqslant$ *es un grupo conmutativo ordenado*

DEMOSTRACIÓN:

Falta establecer que

para todo $a, b, c \in \mathbf{Z} \quad : \quad a < b \Longrightarrow a + c < b + c$

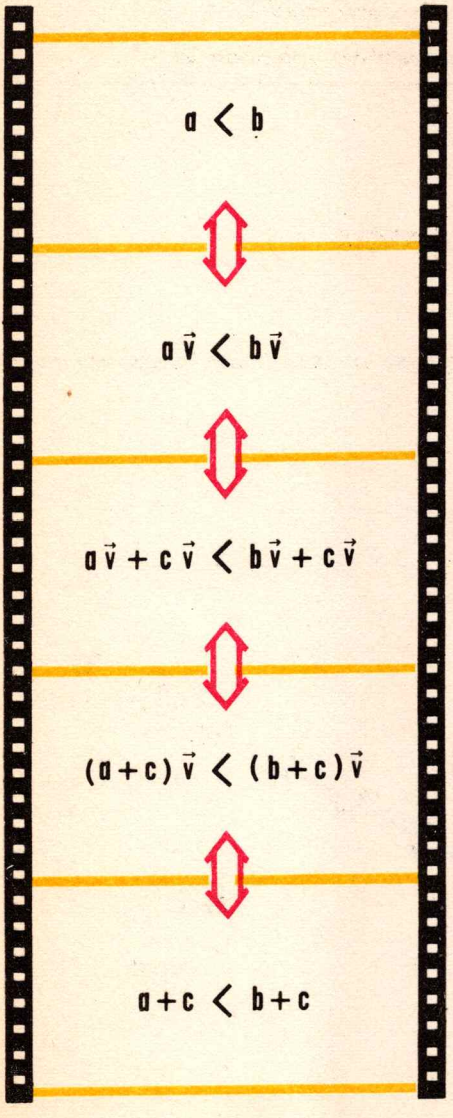
He aquí enteros racionales a, b, c tales que $a < b$

He aquí un vector no nulo $\vec{v} \in \Pi_o$

Orientemos la recta ov poniendo $\vec{o} < \vec{v}$

Sabemos que $\mathbf{Z}\vec{v}, +, \leqslant$ es entonces un grupo ordenado y que la biyección

$$f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\vec{v} : z \to z\vec{v}$$ es creciente.



f es creciente

$\mathbf{Z}\vec{v}, +, \leqslant$ es un grupo ordenado

Cálculo en $\mathbf{Z}\vec{v}, +$

f es creciente

l.q.q.d.

FIG. 49

Recapitulemos todos los resultados obtenidos hasta ahora en este capítulo.

TEOREMA

Si se ordena la recta ov poniendo $\vec{o} < \vec{v}$,

Entonces la aplicación $Z \to \vec{Z}v : z \to z\vec{v}$

es un isomorfismo creciente

del grupo conmutativo ordenado $Z, +, \leqslant$

sobre el grupo conmutativo ordenado $\vec{Z}v, +, \leqslant$

4 — GRADUACIÓN (AFÍN) DE LA RECTA

He aquí una recta D.

Llamemos $\vec{o}$ y $\vec{v}$ a dos puntos distintos de la recta D que orientamos poniendo

$$\vec{o} < \vec{v}$$

El grupo $\vec{Z}v$ es una parte de D

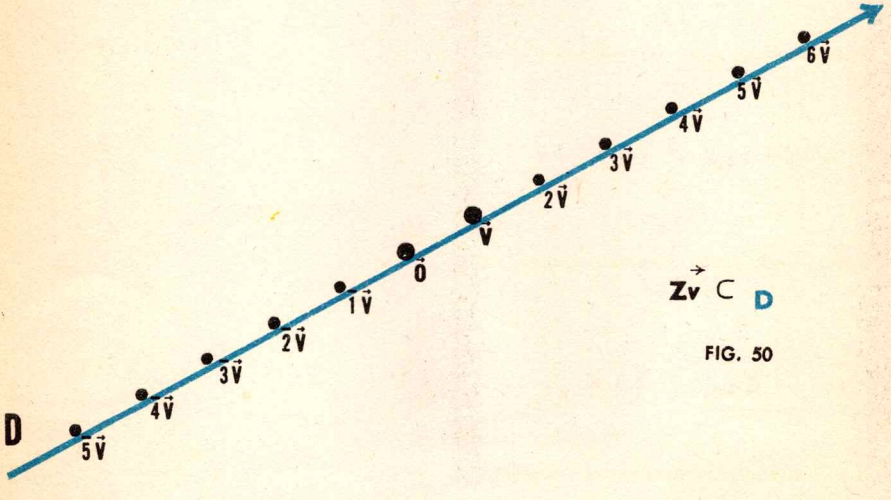


FIG. 50

Sabemos que $\mathbf{Z}\vec{v} \to \mathbf{Z} : z\vec{v} \to z$ es una biyección

(más aún, es un isomorfismo creciente $\mathbf{Z}\vec{v}, +, \leqslant \;\to\; \mathbf{Z}, +, \leqslant$)

Vamos a materializar esta biyección **marcando** z en todo punto $z\vec{v}$ del dibujo.

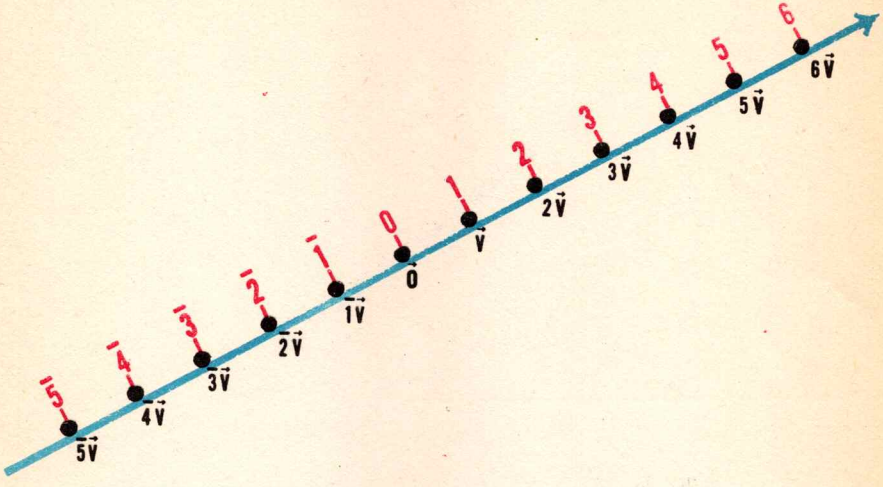


FIG. 51

Se obtiene así una recta graduada.

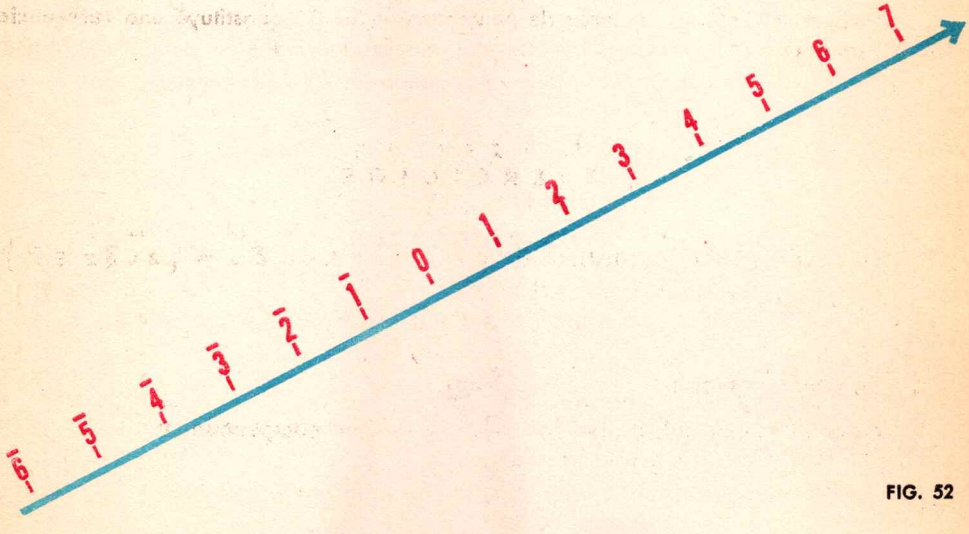


FIG. 52

Muchas veces es útil graduar las rectas en binario.

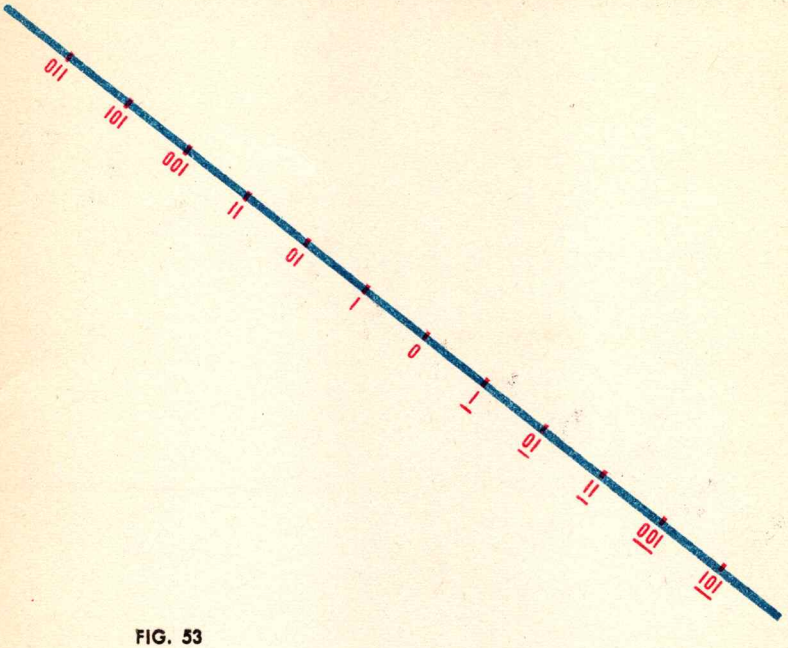


FIG. 53

Toda graduación de una recta está determinada cuando se sabe qué puntos han sido marcados con 0 y con 1.

Se designará con D_{01} la recta D en la cual se han marcado dos puntos distintos 0 y 1 lo cual le segura de inmediato una graduación bien determinada.

También se dice que la cupla de puntos marcados 0,1 constituye una **referencia** para esta recta.

EJERCICIOS

1. Para todo vector $\vec{v}$ (¡distinto de $\vec{o}$ o no!) se tiene $\mathbf{Z}\vec{v} = \{ z\vec{v} \mid z \in \mathbf{Z} \}$
   Calcula $\mathbf{Z}\vec{o}$.

2. Para todo vector $\vec{v}$
   $\vec{Zv}$ es el menor sub-grupo de Π_o, $+$ que comprende $\vec{v}$.

3. $2\mathbf{Z}$ es el menor sub-grupo de $\mathbf{Z}, +$ que comprende 2.

4. ¿Cuál es el menor sub-grupo de $\mathbf{Z}, +$ que comprende 3?

5. ¿Cuál es el menor sub-grupo de $\mathbf{Z}, +$ que comprende -6?

6. ¿Cuál es el menor sub-grupo de $\mathbf{Z}, +$ que comprende 123.456.789?

7. Los grupos considerados en los ejercicios 2 a 6 son isomorfos.

8. He aquí los enteros racionales z_1, z_2.
Se te indica que el menor sub-grupo de $\mathbf{Z}, +$ que comprende z_1
es igual al menor sub-grupo de $\mathbf{Z}, +$ que comprende z_2.
¿Qué puedes decir de z_1 y z_2?

9. **Si** el menor sub-grupo de $\mathbf{Z}, +$ que comprende $z \in \mathbf{Z}$ *es finito*
Entonces $z =$

10. **Si** $\vec{v} \in \Pi_o$ es un vector no nulo y la recta ov está orientada por $\vec{o} < \vec{v}$
Entonces la biyección $\mathbf{Z}\vec{v}, \leqslant \rightarrow \mathbf{Z}, \leqslant : z\vec{v} \rightarrow z$ es **creciente.**

11. **Si** $\vec{v} \in \Pi_o$ es un vector no nulo y la recta ov está orientada por $\vec{v} < \vec{o}$,
Entonces la biyección $\mathbf{Z}, \leqslant \rightarrow \mathbf{Z}\vec{v}, \leqslant : z \rightarrow z\vec{v}$ es **decreciente.**

12. $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} : z \rightarrow -z$ es un isomorfismo decreciente del grupo $\mathbf{Z}, +, \leqslant$ sobre sí mismo.

13. La permutación $z \rightarrow z + 5$ de $\mathbf{Z}$ es una aplicación creciente de $\mathbf{Z}, \leqslant$ sobre sí mismo y no es un isomorfismo del grupo $\mathbf{Z}, +$ sobre sí mismo.

14. La aplicación $\mathbf{Z} \rightarrow 17\mathbf{Z} : z \rightarrow 17z$
es un isomorfismo creciente del grupo ordenado $\mathbf{Z}, +, \leqslant$ sobre el grupo ordenado $17\mathbf{Z}, +, \leqslant$.

15. Todo sub-grupo de un grupo ordenado es ordenado.

16. ¿Quieres clasificar en orden creciente

17; — 57; 69; — 227; — 1.000.000; — 1.000.001; 1; — 456.787; — 456.786; — 456.788; —39; 426.789; — 426.789?

17. $\{ x \in \mathbf{Z} \mid x + 6 < 9 \text{ y } 3 \leqslant x + 7 \} = \{ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2 \}$

18. $\{ x \in \mathbf{Z} \mid x + 2 \leqslant 1 \text{ y } -5 \leqslant x - 6 \} = \phi$

19. Dibuja una parte de las graduaciones definidas por las referencias $(^0, {}^1)$ y $(^0, {}^1)$.

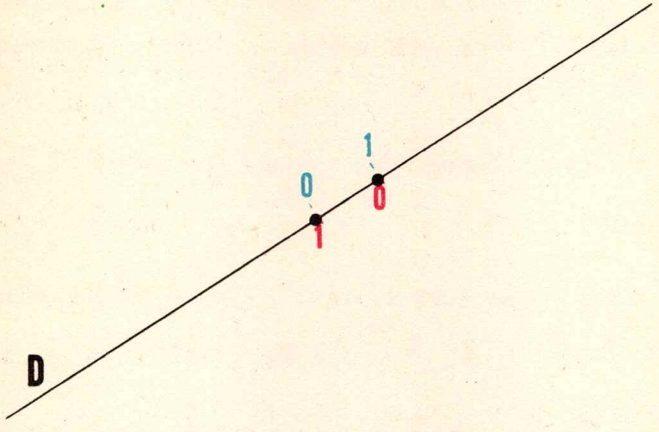


FIG. 54

Azul → rojo define una permutación p de Z:

0 → 1	1 → 0	$p(7)$ =
1 → 0	0 → 1	$p(83)$ =
-1 → 2	→ -1	$p(295)$ =
2 →	-1 → 2	
-2 →	→ -2	
3 →	→ 3	
-7 →	→ -7	
10 →	→ 10	
-15 →	→ -15	
z →	→ z	
283 →	→ 283	
-1023 →	→ -1023	

Establece que $p^{-1} = p$

Calcula $p^2 = p \circ p$, p^3, p^{17}, p^{-189}

20. Completa las graduaciones definidas por

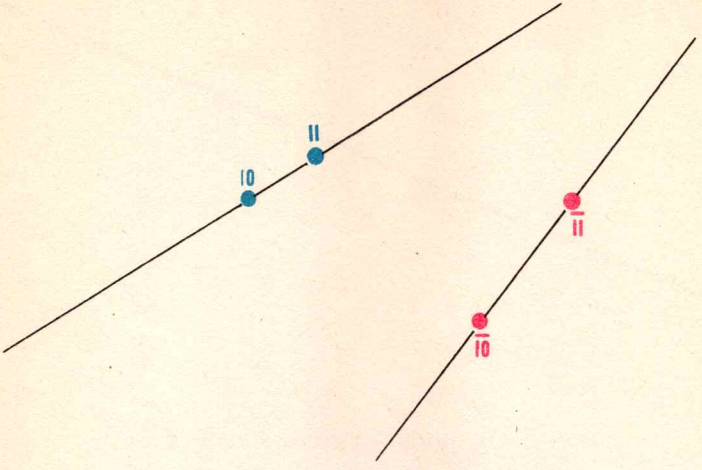


FIG. 55

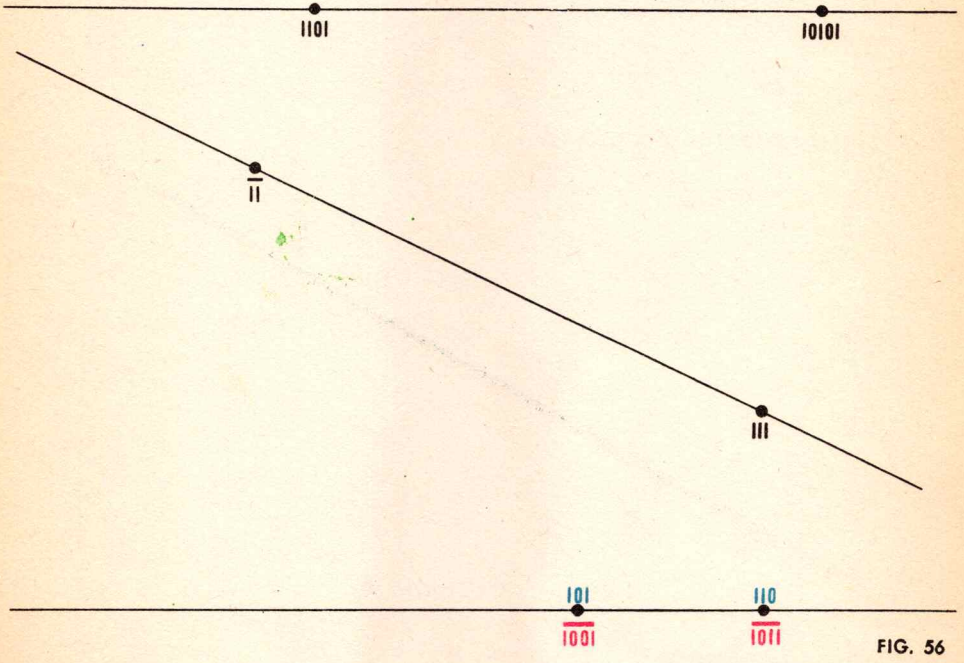


FIG. 56

21. Completa las graduaciones definidas por

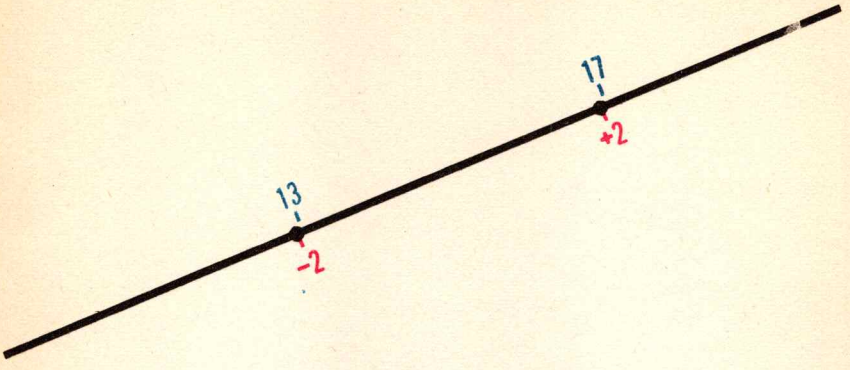
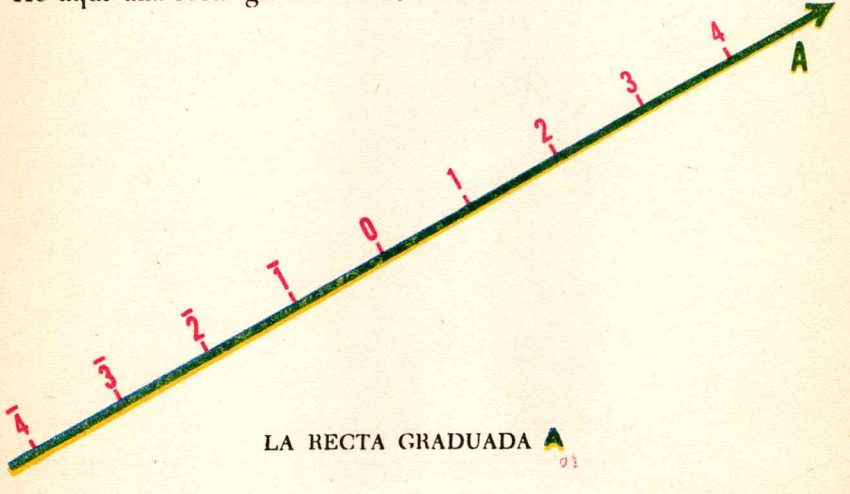


FIG. 57

Azul → rojo define una permutación p de $\mathbf{Z}$:

13 → -2	13 → -2
17 → 2	17 → 2
0 →	→ 19
-8 →	→ -5
-114 →	→ -3
x →	→ y

22. He aquí una recta graduada A_{01}



LA RECTA GRADUADA A_{01}

FIG. 58

Como las proyecciones de cuplas equipolentes son cuplas equipolentes, toda proyección paralela p: A → B

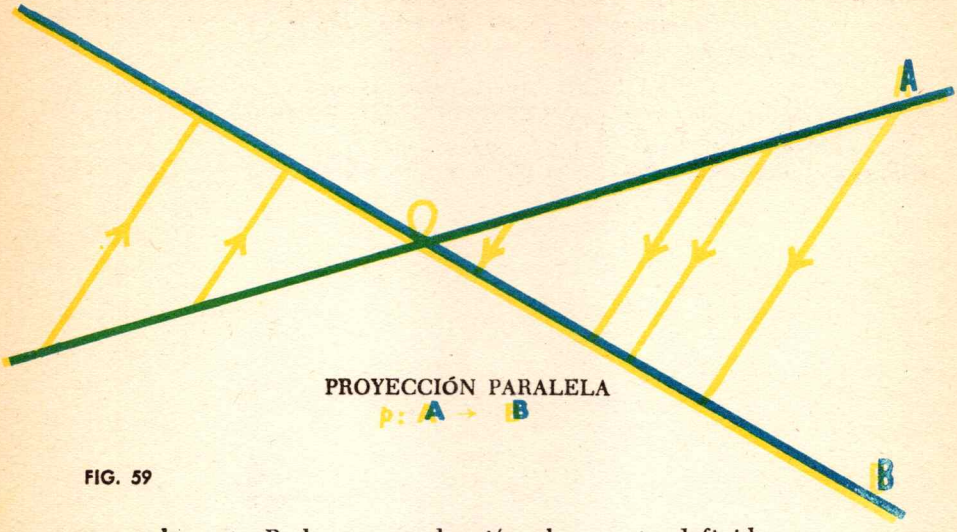


FIG. 59

provee a la recta B de una graduación claramente definida por

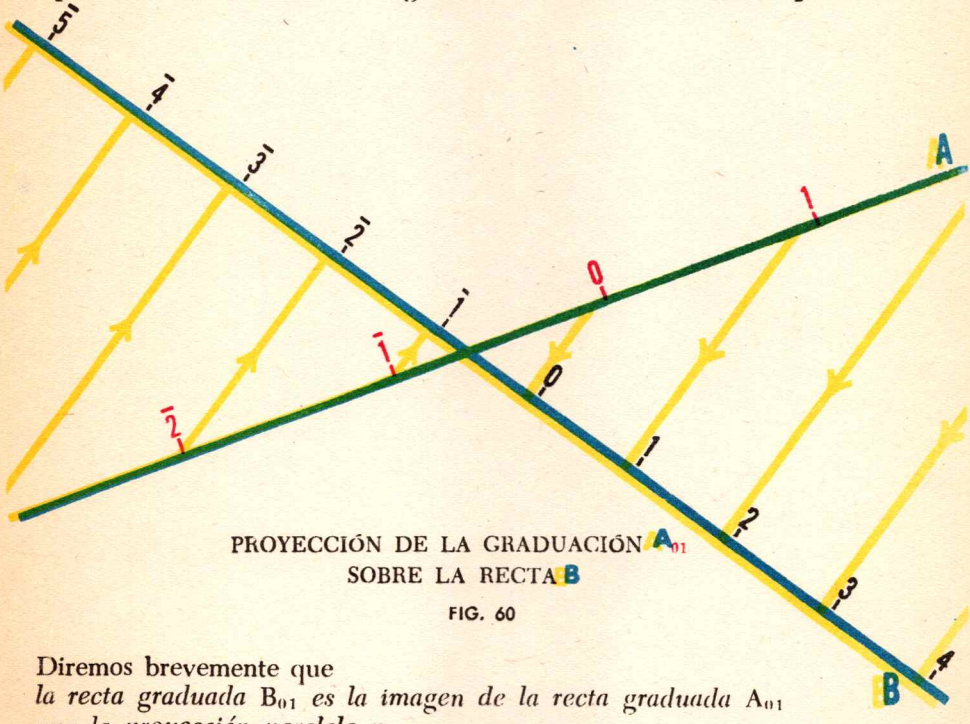


FIG. 60

Diremos brevemente que
la recta graduada B_{01} *es la imagen de la recta graduada* A_{01} *por la proyección paralela p.*

23. Si A_{01} y B_{01} *son rectas graduadas,*

Entonces *¿existe una proyección paralela que aplique* A_{01} *sobre* B_{01} *... o una sucesión de proyecciones paralelas cuya compuesta aplique* A_{01} *sobre* B_{01}*?*

24. Si A_{01} y B_{01} son rectas graduadas que tienen el mismo *o*, pero tales que $A \neq B$,

Entonces existe una proyección paralela que aplica A_{01} sobre B_{01}

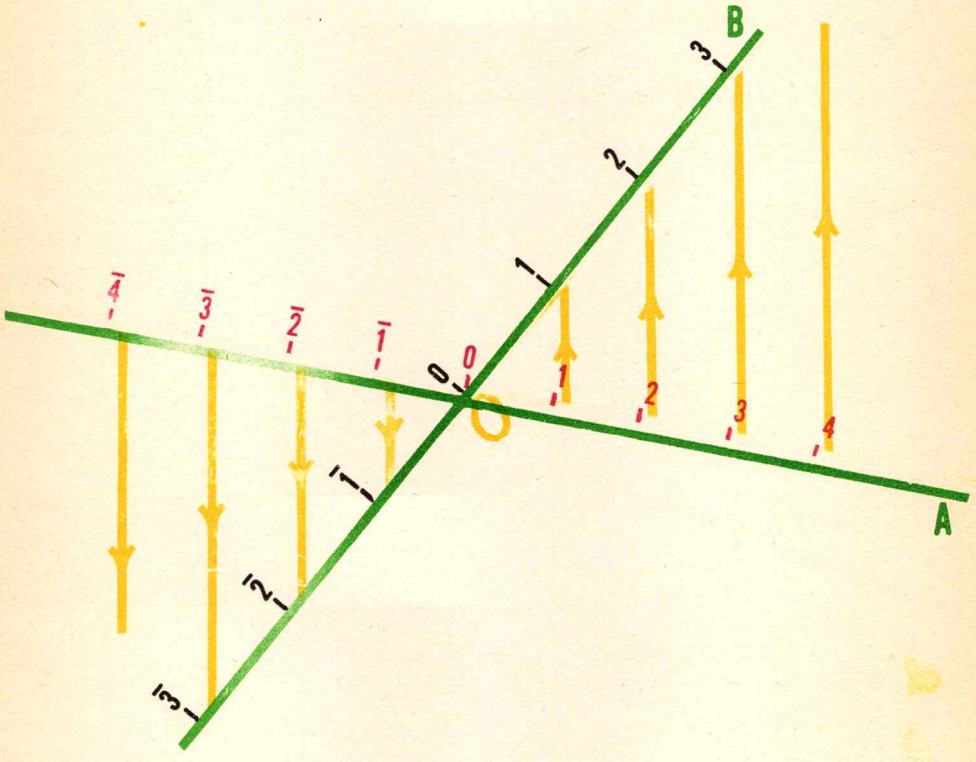


FIG. 61

25. Si las rectas graduadas A_{01} y B_{01} tienen el mismo o y son tales que $A = B$,

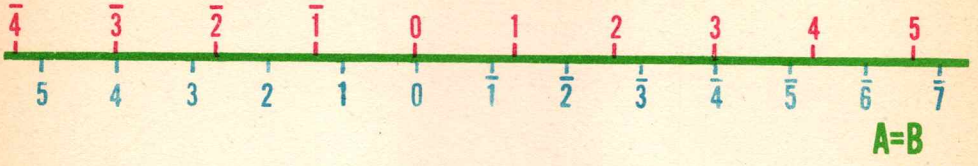


FIG. 62

Entonces existen proyecciones paralelas p: $A \to C$ y q: $C \to B$ tales que B_{01} sea la imagen de A_{01} por q o p

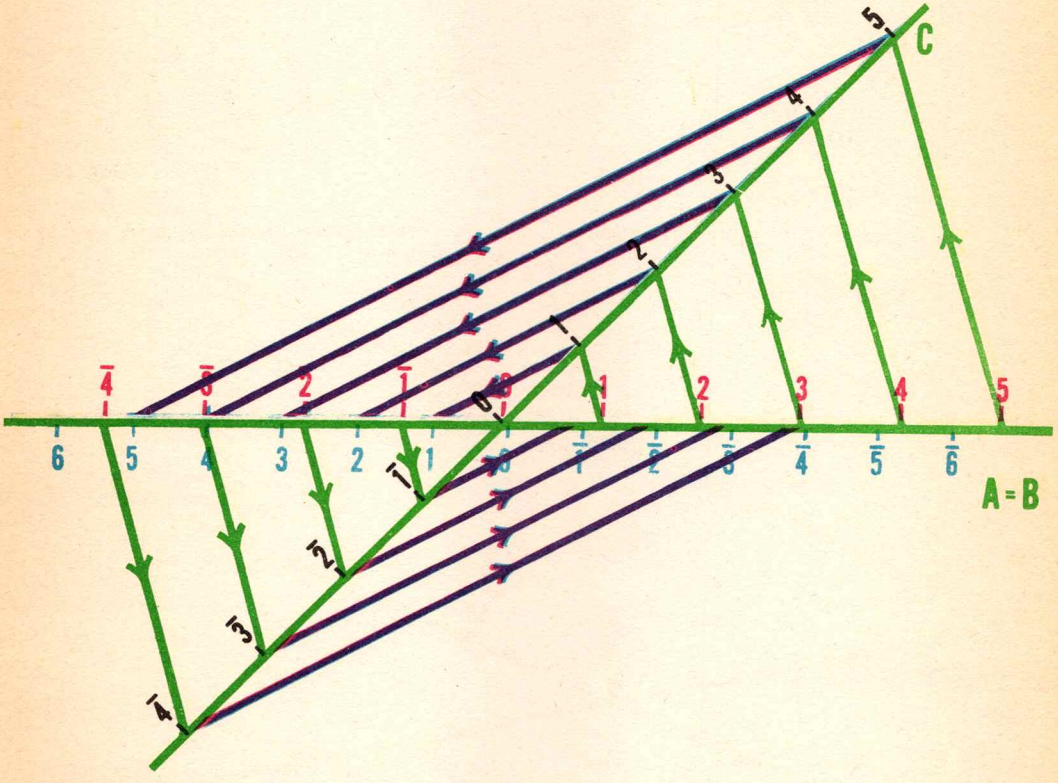


FIG. 63

26. Si las rectas graduadas A_{01} y B_{01} no tienen el mismo o, y son tales que $A \neq B$

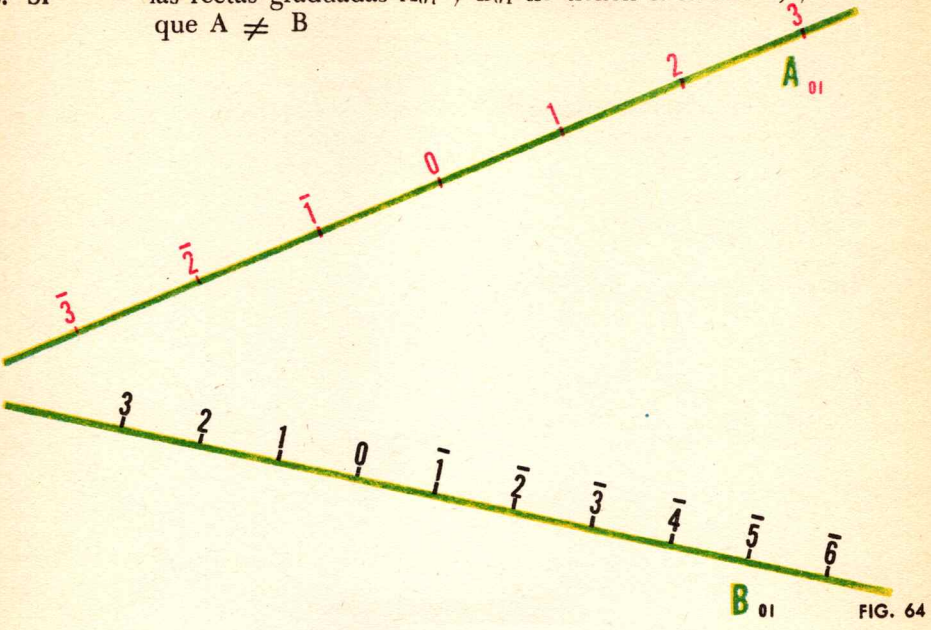


FIG. 64

Entonces existe una recta graduada C_{01} y proyecciones paralelas p: A → C y q: C → B tales que q o p aplica A_{01} sobre B_{01}

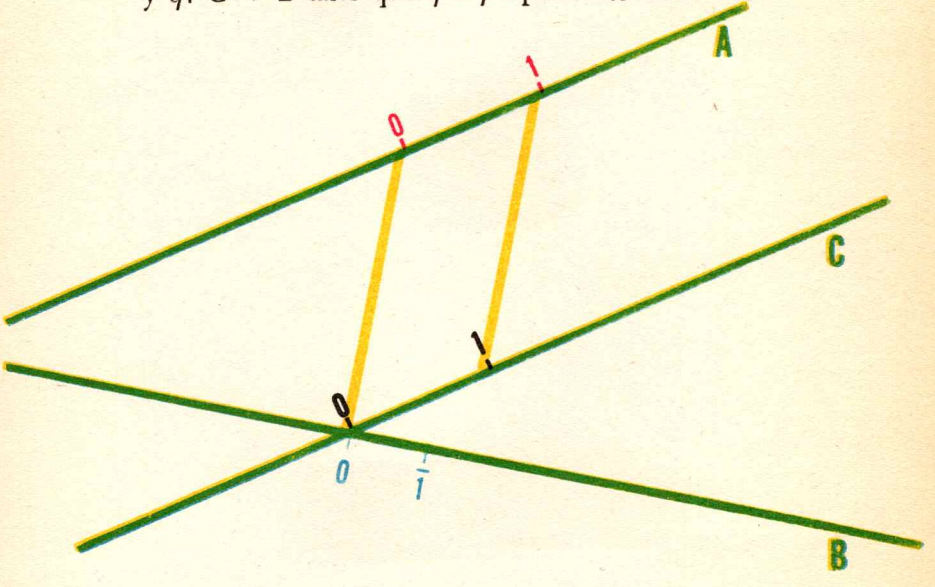


FIG. 65

27. Si las rectas graduadas A_{01} y B_{01} no tienen el mismo o y son tales que $A = B$,

Entonces existen rectas graduadas C_{01} y D_{01}

y proyecciones paralelas p: $A \to C$, q: $C \to D$, r: $D \to B$ tales que $r \circ q \circ p$ aplica A_{01} sobre B_{01}.

28. Si A_{01} y B_{01} designan rectas graduadas cualesquiera,

Entonces existen rectas graduadas C_{01} y D_{01}
y proyecciones paralelas p: $A \to C$, q: $C \to D$, r: $D \to B$ tales que $r \circ q \circ p$ aplica A_{01} sobre B_{01}.

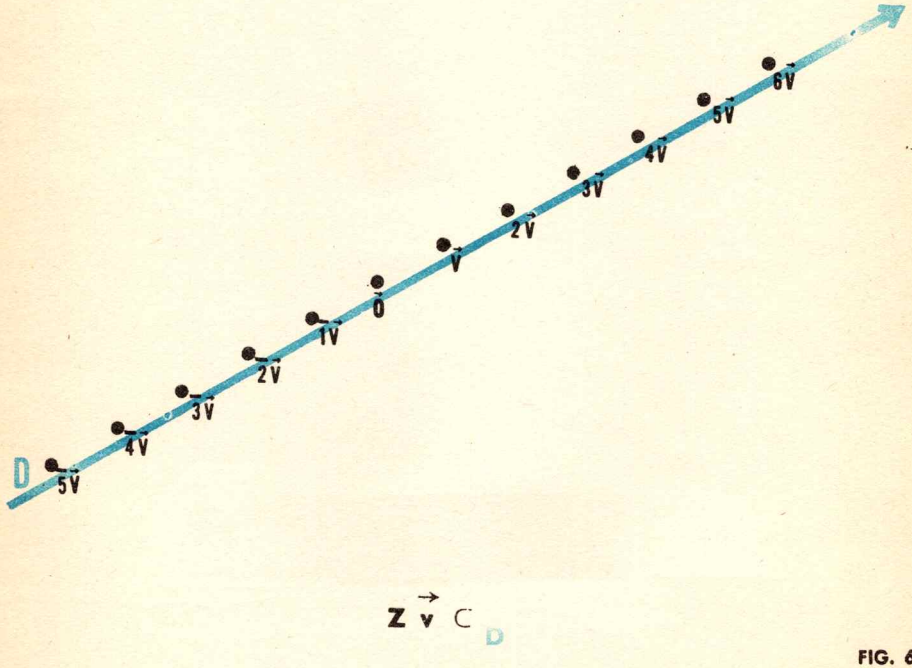
4

Axioma de Arquímedes

He aquí una recta D

Llamemos $\vec{o}$ y $\vec{v}$ a dos puntos distintos de D y orientemos la recta D = ov poniendo $\vec{o} < \vec{v}$

El grupo ordenado $\vec{Zv}$ es una parte de D_0



$\vec{Zv} \subset D$

FIG. 66

Piensa en un punto $\vec{p} \in D_o$

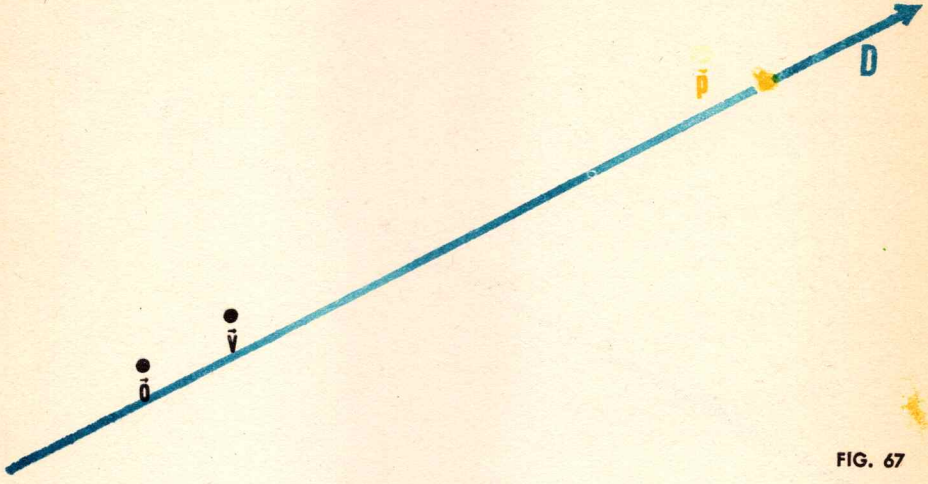


FIG. 67

Puede suceder que $\vec{p} \in \overrightarrow{Zv}$
En tal caso, existe uno y solo un entero racional z tal que $\vec{p} = z\vec{v}$

FIG. 68

Si $\vec{p} \notin \vec{Zv}$,

Entonces admitirás sin dificultad que $\vec{p}$ está situado entre dos puntos consecutivos de $\vec{Zv}$

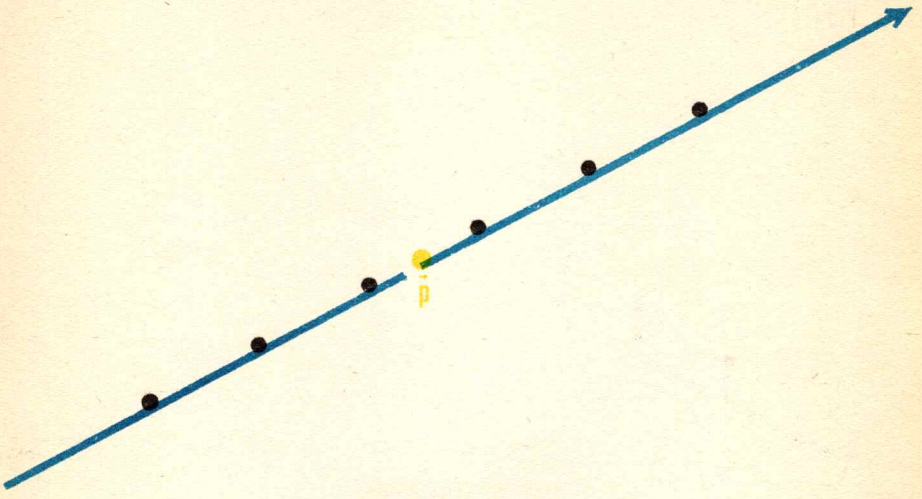


FIG. 69

Dicho de otro modo, nosotros **admitimos** que en este caso existe uno y solo un $z \in \mathbf{Z}$ tal que

$$\vec{zv} < \vec{p} < (z+1)\vec{v}$$

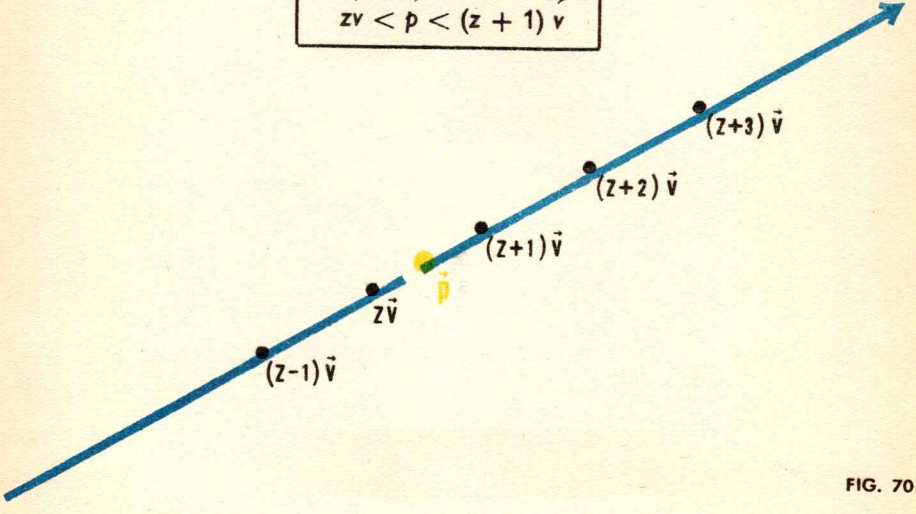


FIG. 70

El axioma de Arquímedes reúne estas dos eventualidades.

AXIOMA Π 11

Si *la recta ov está orientada por* $\vec{o} < \vec{v}$

Entonces *para todo* $\vec{p} \in ov$, *existe uno y solo un* $z \in \mathbf{Z}$ *tal que*

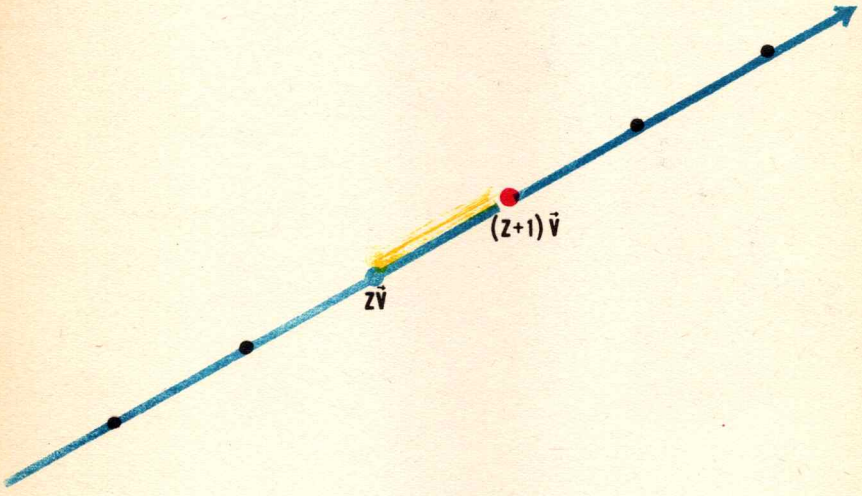
$$z\vec{v} \leqslant \vec{p} < (z+1)\,\vec{v}$$

ARQUÍMEDES

Como

$$z\vec{v} \leqslant \vec{p} < (z+1)\,\vec{v} \iff \vec{p} \in [z\vec{v},\ (z+1)\,\vec{v}\,[$$

el axioma de Arquímedes afirma que todo punto $\vec{p}$ de la recta ov pertenece a uno y solo uno de los segmentos semiabiertos consecutivos definidos por $\mathbf{Z}\vec{v}$



Para todo $\vec{p} \in ov$, existe uno y solo un $z \in \mathbf{Z}$ tal que

$$\vec{p} \in [z\vec{v},\ (z+1)\vec{v}[$$

FIG. 71

EJERCICIOS

1. El axioma de Arquímedes define una aplicación $f : D_{01} \to \mathbf{Z}$
Traza algunas flechas de su esquema.

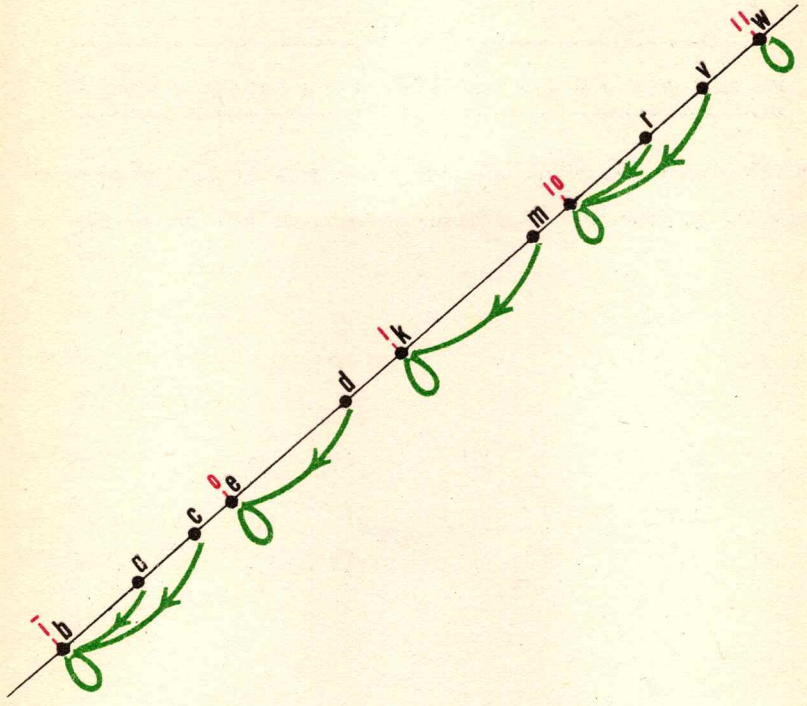


FIG. 72

$f(b) = \bar{1}$, $f(k) =$
$f(a) =$, $f(m) =$
$f(c) =$, $f(r) =$
$f(d) =$, $f(w) =$
$f(e) =$

2. Traza las rectas perpendiculares X ⊥ Y.

Marca 0 en el punto de intersección.

Marca 1 en un segundo punto de X y en un segundo punto de Y.

Representa la función *f* del ejercicio anterior aplicando todo punto de X_{01} sobre el punto correspondiente de la graduación de ... Y_{01}.

Traza algunas flechas del esquema así definido.

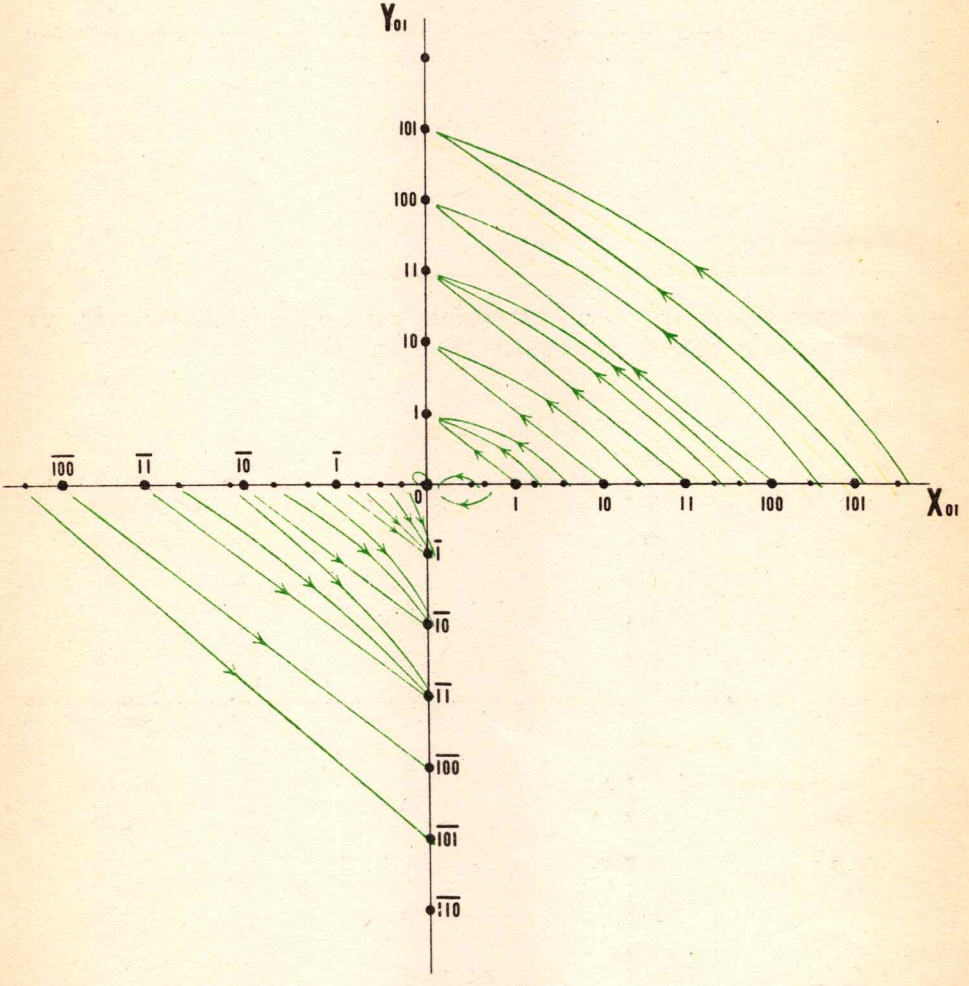


FIG. 73

3. Fijemos nuestra atención sobre una de las flechas del esquema anterior. Ella define un punto de Π que la caracteriza enteramente.

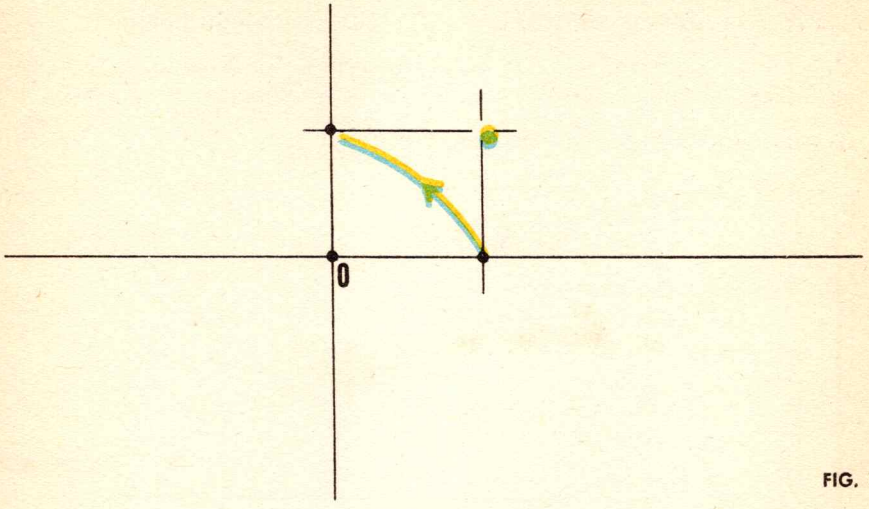


FIG. 74

Representa la función f mediante puntos característicos así definidos por cada una de las flechas del esquema de la fig. 72.

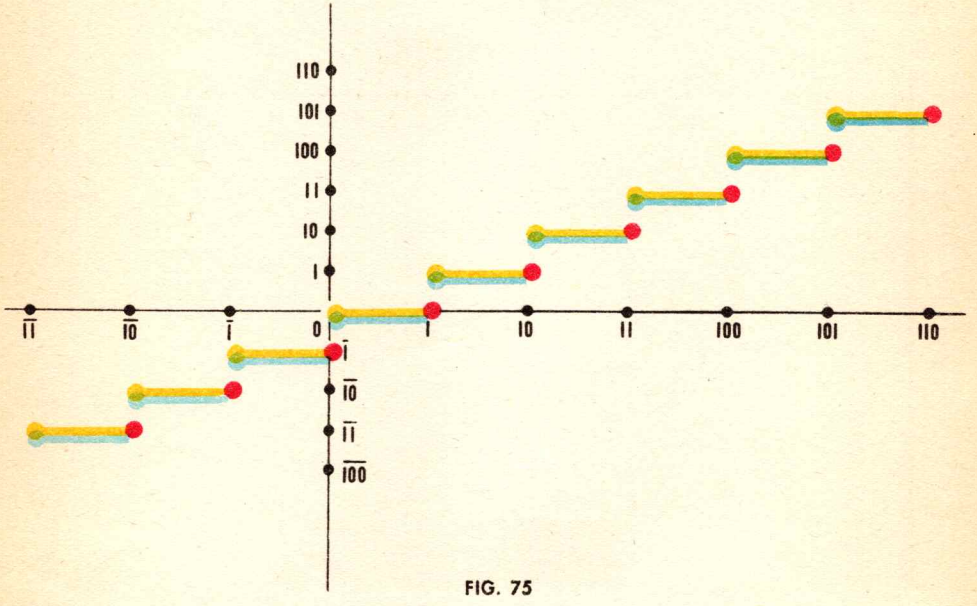


FIG. 75

He aquí por qué se dice que f es una **función en escalera.**

4. El dibujo siguiente presenta una parte de una nueva función en escalera que anotaremos g.

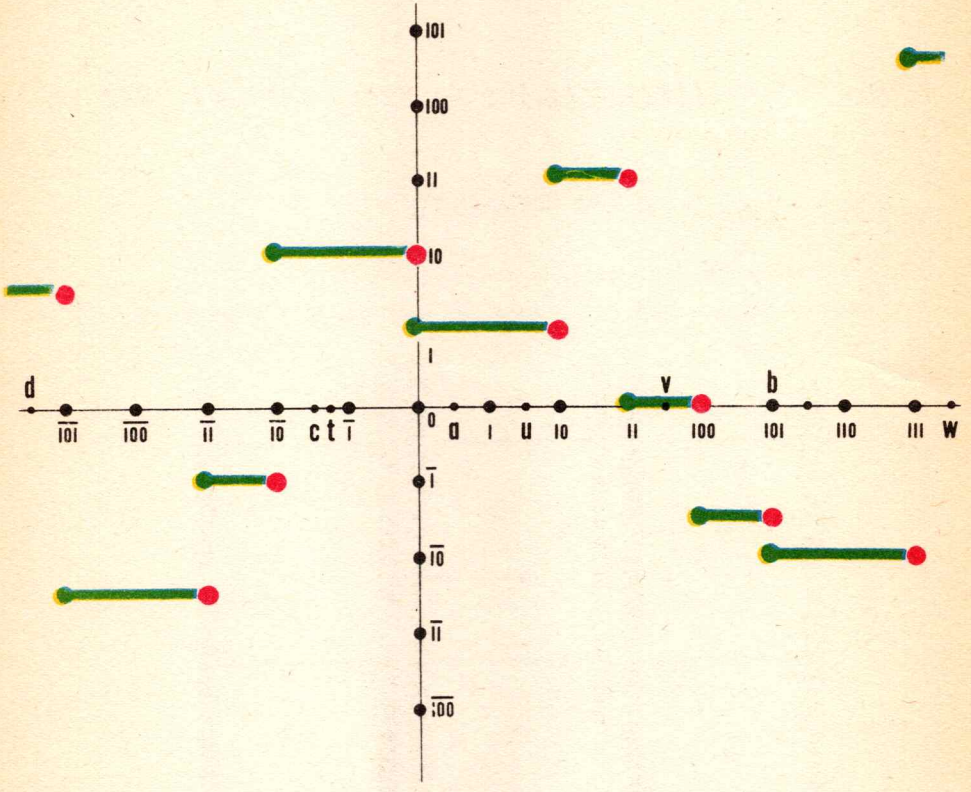


FIG. 76

¿Quieres completar las fórmulas?

$g(0) =$	$g(110) =$	$g(\overline{100}) =$	$g(d) =$
$g(1) =$	$g(111) =$	$g(\overline{101}) =$	$g(u) =$
$g(10) =$	$g(\overline{1}) =$	$g(a) =$	$g(v) =$
$g(100) =$	$g(\overline{10}) =$	$g(b) =$	$g(w) =$
$g(101) =$	$g(\overline{11}) =$	$g(c) =$	$g(t) =$

5

Sub-graduaciones de la recta

1 — PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

He aquí dos puntos distintos a, b

Nosotros conocemos diversos métodos de construcción del punto medio m de $[a, b]$

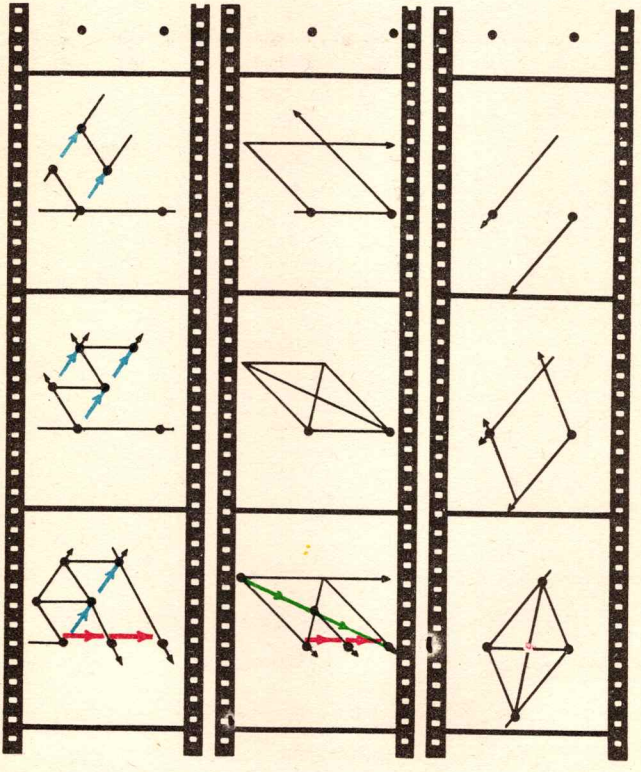


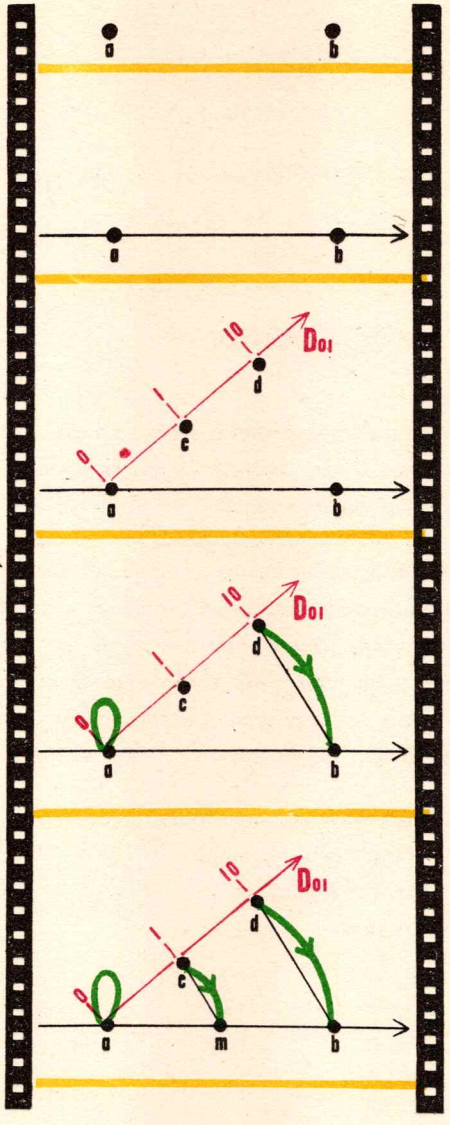
FIG. 77

Admitirás fácilmente que $m \in]a, b[$

Por si ello te interesa, he aquí un filme que **demuestra** que

Si $a \neq b$

Entonces el punto medio m de $[a, b]$ pertenece a $]\, a, b\,[$



PROYECCIÓN PARALELA

$p : D_{01}, \leqslant \rightarrow ab, \leqslant$

$a < d$
y
$p(a) < p(d)$

Luego:
La proyección p es **creciente** (axioma Π 8,1)

$a < c < d$

$\Downarrow$

$p(a) < p(c) < p(d)$

$\Updownarrow$

$a < m < b$

$\Updownarrow$

$m \in\,]\, a\, b\,[$

FIG. 78 ·l.q.q.d.

EJERCICIOS

1. **Si** u, v designan puntos distintos de Π,
Entonces $]u, v[\neq \phi$

2. Sean u, v puntos distintos
Llama m_1 al punto medio de $[u, v]$
m_2 al punto medio de $[u, m_1]$
m_3 al punto medio de $[u, m_2]$ y así siguiendo.

Cada uno de los puntos m_i es distinto de los anteriores y

$$\{m_1, m_2, m_3, \ldots\} \subset]u, v[$$

Así, el conjunto $]u, v[$ es infinito.

2 — GRADUACIÓN DE LA RECTA

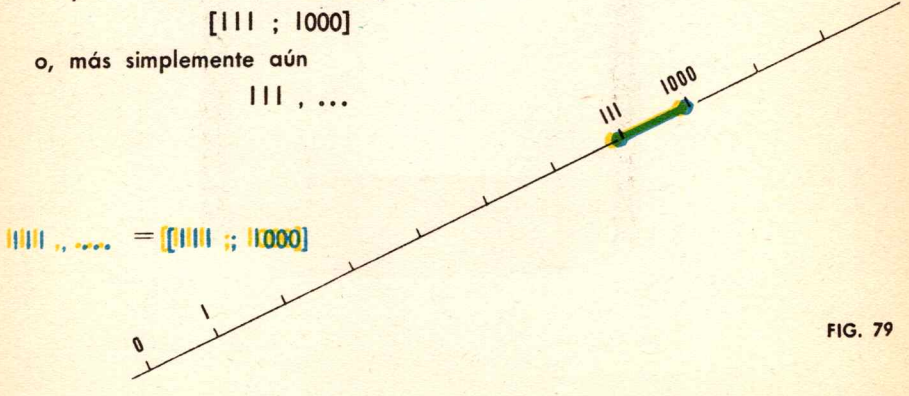
— Traza una recta D
Marca 0 y 1 en dos puntos distintos de esta recta.
— De este modo, la recta D está provista de una orientación y de una graduación.
— Piensa en un punto p de la recta D
— ...
— La graduación de la recta introduce el conjunto de segmentos cerrados que tienen como extremos puntos consecutivos de la graduación.
Comunícame la posición aproximada del punto p, indicándome uno de los segmentos cerrados a los cuales ese punto p pertenece.
— El punto p pertenece al segmento cerrado cuyos extremos son los puntos marcados 111 y 1000.

— Fijando la graduación una vez por todas,
nos permitiremos anotar este segmento

[111 ; 1000]

o, más simplemente aún

111 , ...



1111 , ... = [1111 ; 1000]

FIG. 79

— Llamaremos brevemente *segmentos de la graduación*, a los segmentos cerrados que tienen como extremos puntos consecutivos de la graduación.
¿Pertenece todo punto q de la recta D a por lo menos uno de los segmentos de la graduación?

— Sí, en virtud del axioma de Arquímedes.

— ¿Cuál es el conjunto de puntos de la recta D que pertenecen a más de un segmento de la graduación?

— El conjunto de puntos de la graduación.

— He aquí un entero racional z.
¿Cuáles son los segmentos de la graduación a los cuales pertenece el punto marcado z?

— $[z-1\,;\,z]$ y $[z\,;\,z+1]$

Fijando una vez por todas la referencia (0,1), los enteros racionales determinan exactamente los puntos de la graduación.
Todo otro punto de la recta pertenece a uno y solo un segmento cerrado $[z;\,z+1]$ que indica su posición aproximada.

— ¿Cómo mejorar esta aproximación?

— Sub-graduando.

— ¿Cuál es la manera más simple de sub-graduar?

— Marcar el punto medio de cada uno de los segmentos de la graduación.

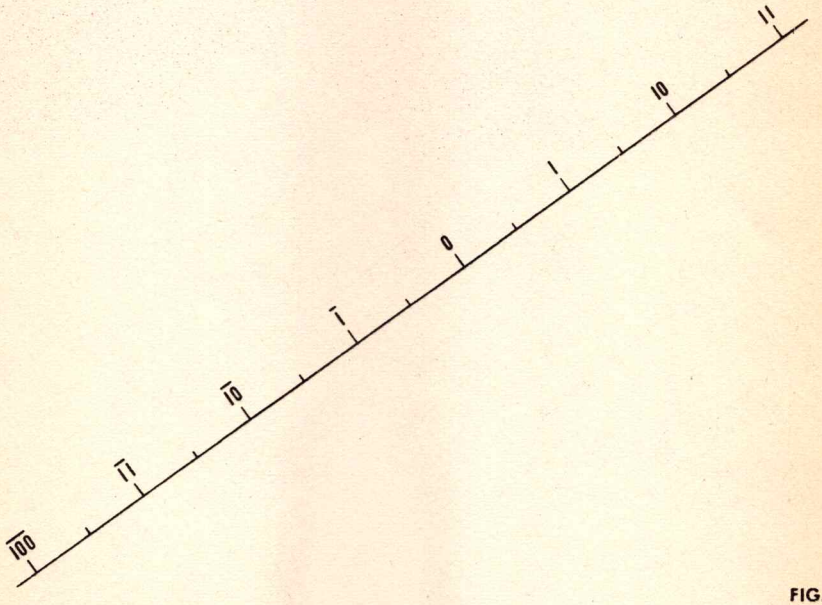
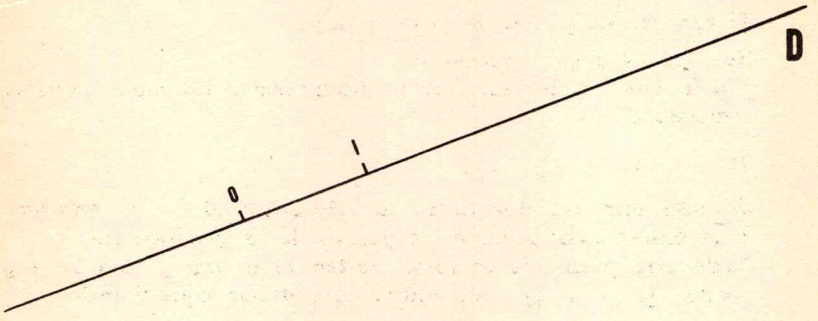


FIG. 80

3 — SUB-GRADUACIÓN BINARIA

He aquí una recta D
Marca 0 y I en dos puntos distintos de D



Construye la graduación así iniciada. FIG. 81

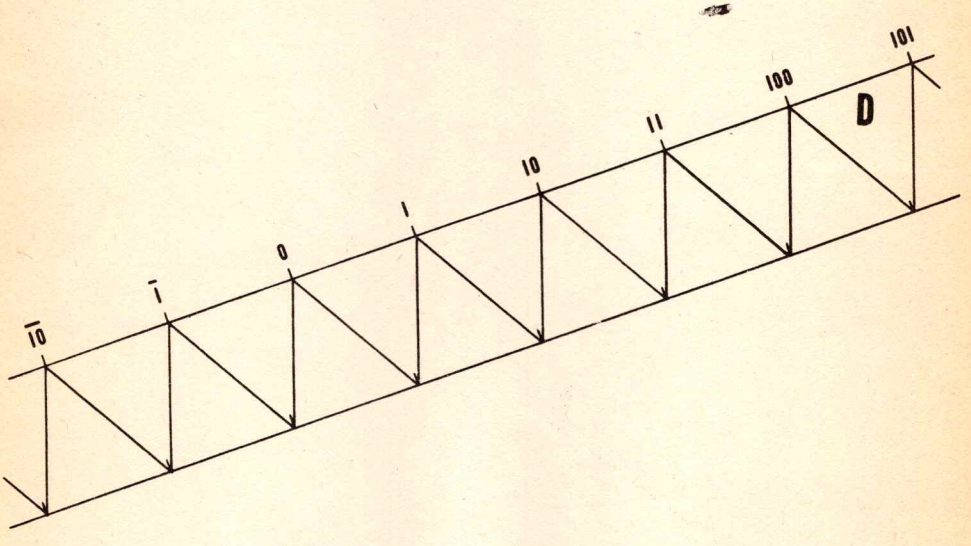
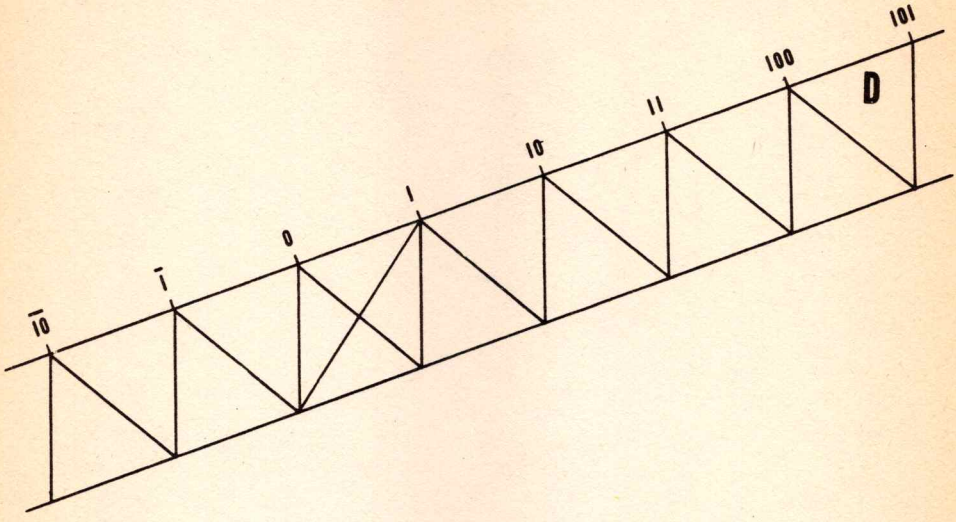


FIG. 82

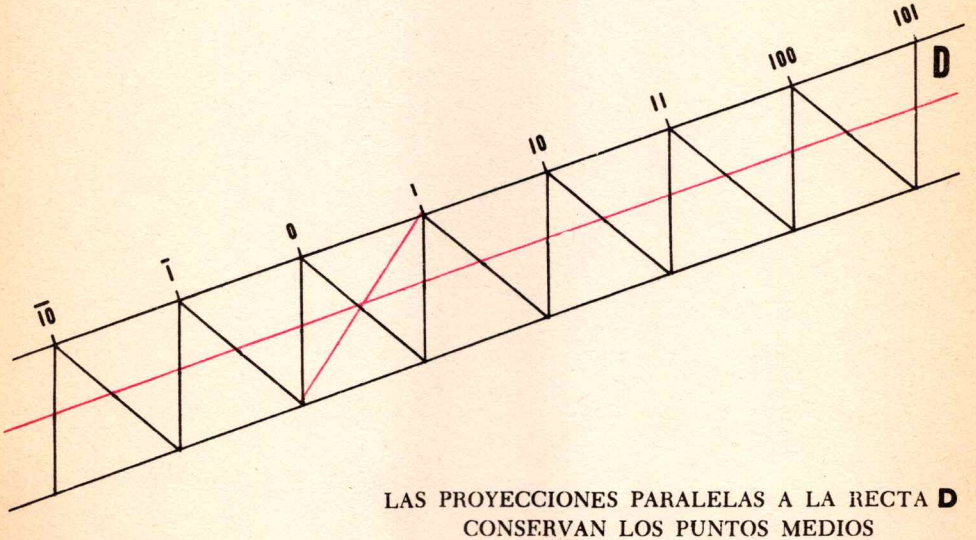
Adoptemos la sugestión propuesta al fin del parágrafo anterior.

Sub-graduemos D_{01} marcando los puntos medios de los segmentos sucesivos de su graduación.



LAS DIAGONALES DE UN PARALELOGRAMO TIENEN EL MISMO PUNTO MEDIO

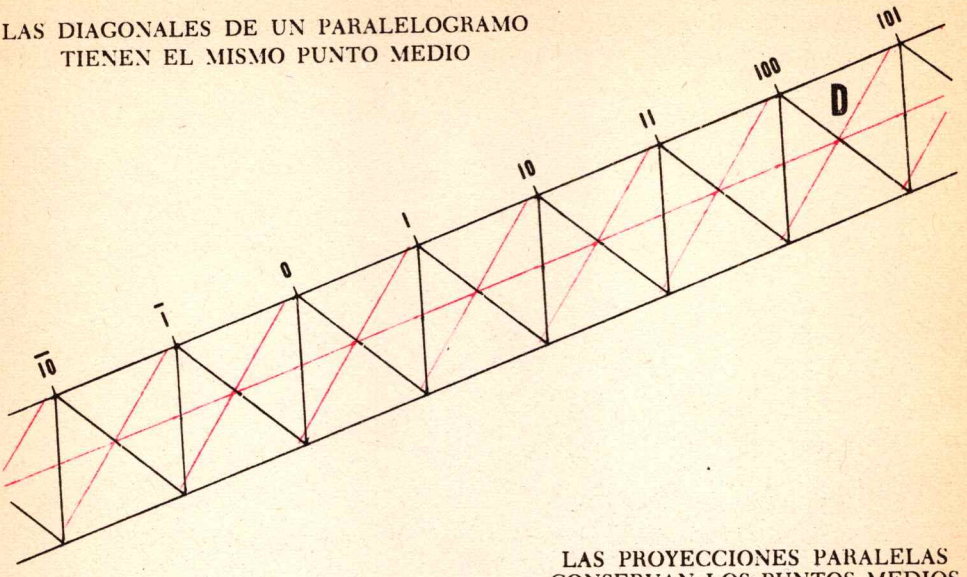
FIG. 83



LAS PROYECCIONES PARALELAS A LA RECTA **D** CONSERVAN LOS PUNTOS MEDIOS

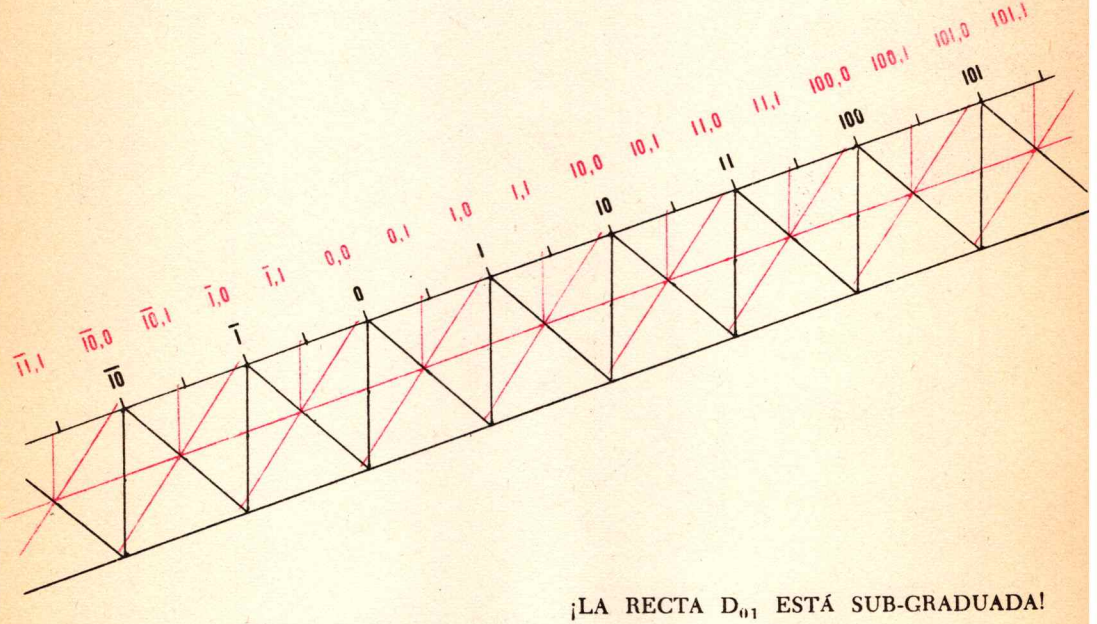
FIG. 84

LAS DIAGONALES DE UN PARALELOGRAMO
TIENEN EL MISMO PUNTO MEDIO



LAS PROYECCIONES PARALELAS
CONSERVAN LOS PUNTOS MEDIOS

FIG. 85



¡LA RECTA D_{01} ESTÁ SUB-GRADUADA!

FIG. 86

Observa el método seguido para obtener las nuevas marcas.

4 — LOS MEDIOS

Volvamos a leer el principio del parágrafo 5 del capítulo I de MM1.

En matemática, los objetos se representan a menudo por **términos**, que son signos o conjuntos de signos.

Así,

$$2,\ 27,\ 9 \times 3,\ 54 : 2,\ 6 + 6,\ 2 + 3 - 5 + 4,\ 1/2$$

son términos que representan respectivamente los objetos siguientes

"el número dos"
"el número veintisiete"
"el número veintisiete"
"el número veintisiete"
"el número doce"
"el número cuatro"
"el número un medio"

Si dos términos designan el mismo objeto y se indica este hecho mediante el signo $=$ de manera bien conocida. **Entonces** se dice que son iguales

$$27 = 9 \times 3$$
$$54 : 2 = 27$$

En caso contrario, se utiliza el signo $\neq$. Así,

$$2 \neq 54 : 2$$
$$27 \neq 2 + 3 - 5 + 4$$
$$6 + 6 \neq 1/2$$

Términos iguales definen el mismo **objeto.**

A menudo se conoce primero el objeto; sus diversas designaciones (términos) son entonces **iguales.**

Napoleón	y	el padre del hijo de Napoleón

son dos términos que designan el mismo objeto. Luego, podemos escribir

Napoleón = El padre del hijo de Napoleón

Supongamos que se ha fijado la referencia (0,1) de la recta D una vez por todas.

Ya has notado que ciertos términos de la graduación y de la sub-graduación determinan el mismo punto de D.

Diremos que **dos términos de la graduación o de la sub-graduación son iguales si determinan el mismo punto.**

Por ejemplo: II y II, 0 determinan el mismo punto.

Luego II = II, 0

Cada uno de los términos II y II, 0 designa el **número tres.**

Más generalmente,

para todo $z \in Z$: $\quad z = z, 0$

Resumiendo:

Los términos z, 0 determinan los puntos de la graduación y por consiguiente designan los enteros racionales.

Por el contrario, los términos z, I determinan puntos que no pertenecen a la graduación. Ellos no designan, pues, enteros racionales.

Los términos z, 1 nos permitirán introducir ciertos números que hasta ahora no hemos encontrado en este curso, pero que tú ya conoces.

El término	0 , I	designa el número	**un medio**
El término	I , I	designa el número	**uno y medio**
El término	II , I	designa el número	**tres y medio**
El término	III , I	designa el número	**siete y medio**
El término	$\overline{\text{III}}$, I	designa el número	**"menos siete" y medio**
El término	z , I	designa el número	**z y medio**

Ya sabes muchas cosas sobre estos números. Has aprendido a adicionarlos y a multiplicarlos. Por el momento, solo te pedimos recordar que

Para todo $z \in Z$: el **número** z, I determina el punto medio de $[z\,;\,z+1]$

— ¿Cómo anotar el conjunto B_1 de los **números** designados por los términos de la sub-graduación?

— $$B_1 = \{\, z,a \;\big|\; z \in Z\,;\, a \in \{0\,;\,1\}\,\}$$

— Es claro que $\quad Z \subset B_1$

Como la recta $D_{(1)}$ está totalmente ordenada, el conjunto B_1 se encuentra también totalmente ordenado.

$$\ldots < \overline{11},1 < \overline{10},0 < \overline{10},1 < \overline{1},0 < \overline{1},1 < 0,0 < 0,1 < 1,0 < 1,1 < 10,0 < 10,1 < \ldots$$

He aquí los números $\quad z_1 , a_1 \quad$ y $\quad z_2 , a_2$

(donde $z_1 , z_2 \in Z \quad$ y $\quad a_1 , a_2 \in \{0;1\}$)

Resulta muy fácil indicar la regla que permite determinar cuál de estos dos números es mayor.

Si $z_1 < z_2$		, **Entonces**	$z_1 , a_1 < z_2 , a_2$
Si $z_1 = z_2$	y $a_1 < a_2$	, **Entonces**	$z_1 , a_1 < z_2 , a_2$
Si $z_1 = z_2$	y $a_1 = a_2$	, **Entonces**	$z_1 , a_1 = z_2 , a_2$
Si $z_1 = z_2$	y $a_1 > a_2$	, **Entonces**	$z_1 , a_1 > z_2 , a_2$
Si $z_1 > z_2$		, **Entonces**	$z_1 , a_1 > z_2 , a_2$

Hemos utilizado el orden de D_{01} para definir un orden total sobre B_1

Acabamos de establecer, sin embargo, que no es necesario recurrir a la recta D para determinar cuál de los número z_1, a_1 y z_2, a_2 es el mayor.

La respuesta a este problema se lee directamente sobre los **binarios** que designan estos números.

Dicho de otro modo, el orden de B_1 está enteramente definido por este mismo conjunto.

EJERCICIOS

1. $\# \{$ La torre Eiffel, la Tierra, el monumento más alto de París $\} = 10$
   $\# \{$ Napoleón, el padre del hijo de Napoleón $\} =$

   $\# \{ \bar{1};\ 0{,}0;\ \overline{101}{,}1;\ \bar{1}{,}0;\ 0;\ 1111{,}0 \} = 100$

   $\# \{ \overline{11}{,}0;\ 101{,}1;\ 111011{,}0;\ 101{,}0;\ \overline{11};\ 101 \} =$

2. $\# \{z,\ a \mid z \in Z;\ a \in \{0;\ 1\}\} = \# Z = \# \omega = \delta$

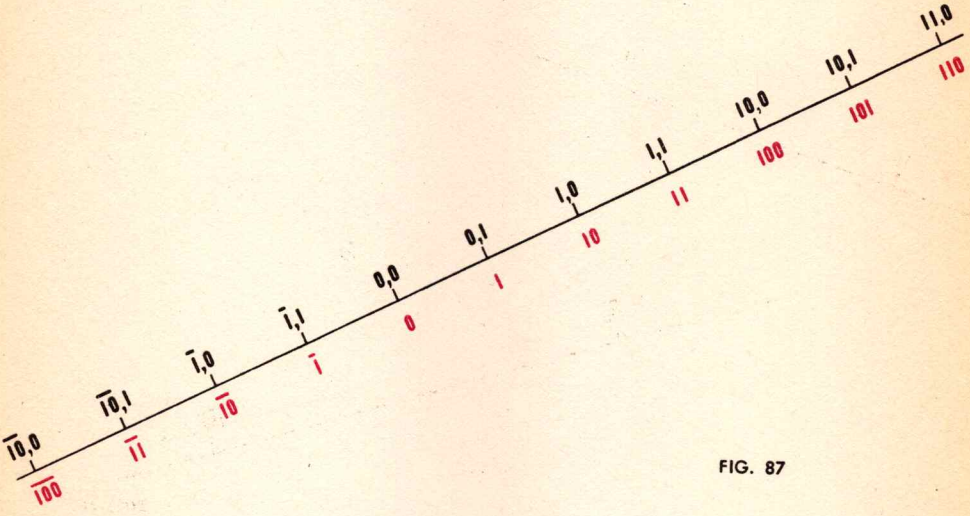


FIG. 87

3. $\{\overline{110}{,}1;\ 11{,}0;\ 0{,}1;\ \overline{110}{,}0;\ 11;\ \overline{110};\ \overline{101}{,}1\}$

da lugar a

$$\overline{110} = \overline{110}{,}0 < \overline{110}{,}1 < \overline{101}{,}1 < 0{,}1 < 11 = 11{,}0$$

Procede del mismo modo:

$\{\ \overline{1010}{,}1;\ 101{,}0;\ \overline{1101}{,}0;\ \overline{1010}{,}0;\ \overline{1101};\ 11{,}1;\ 101;\ \overline{1001}{,}1\ \}$

4. Completa las sub-graduaciones binarias iniciadas en el ejercicio 3.

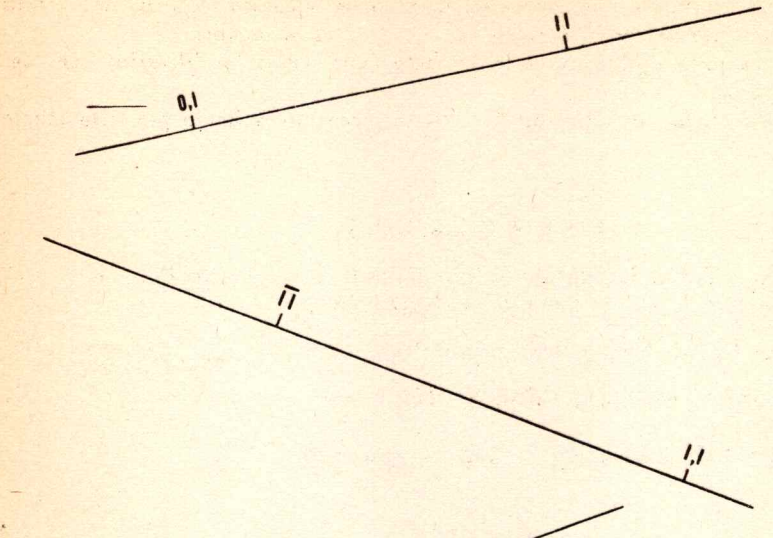


FIG. 88

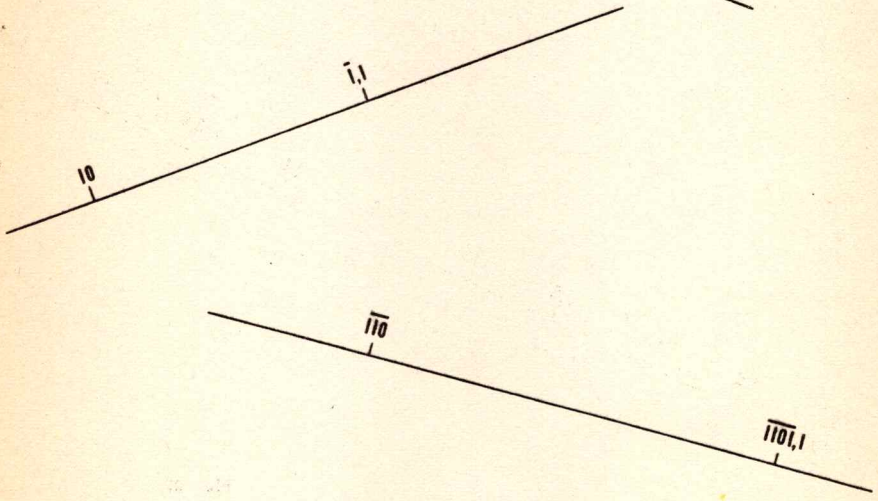


FIG. 89

Habiendo fijado la referencia (0;1), designaremos los puntos de la graduación y de la sub-graduación (que esa referencia define) por medio de sus marcas.

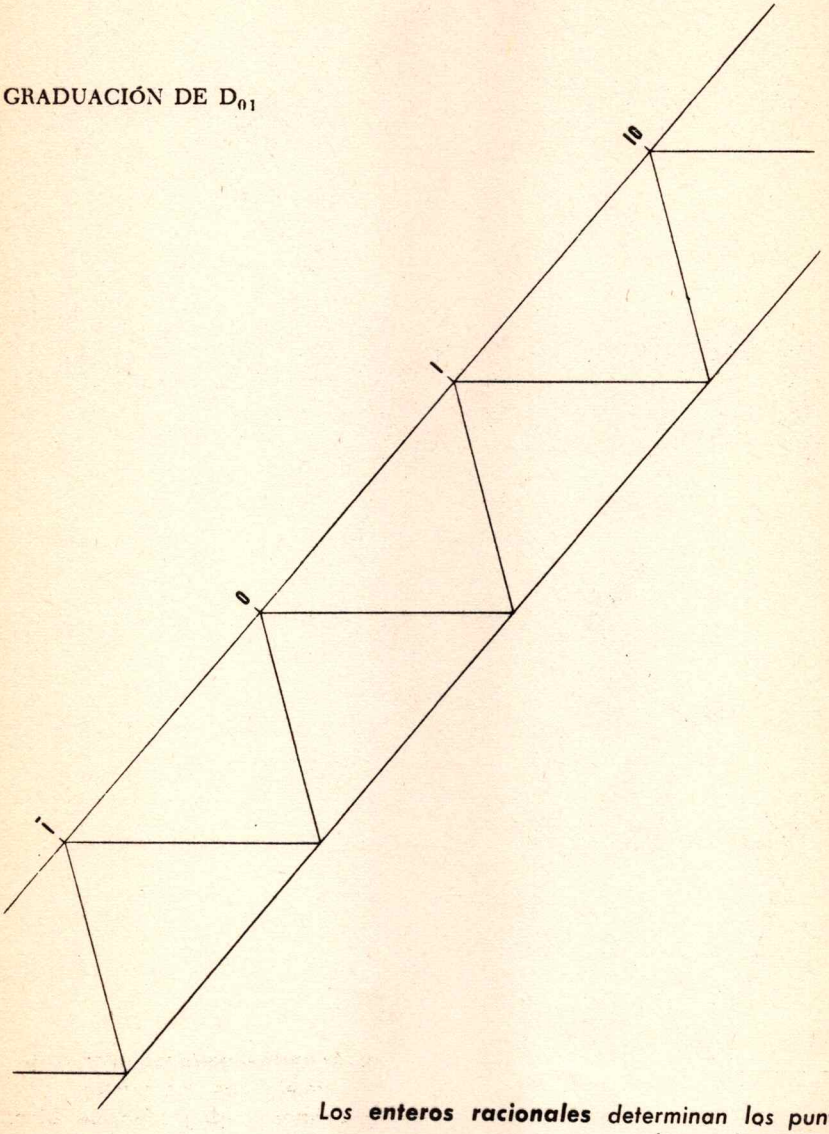
5. $\ldots \uparrow (\overline{1}0,1;\ \overline{1}) \uparrow (\overline{1};\ \overline{1},1) \uparrow (\overline{1},1;\ 0) \uparrow (0;\ 0,1) \uparrow (0,1;\ 1) \uparrow (1;\ 1,1) \uparrow \ldots$

$\ldots \uparrow (z;\ z,1) \uparrow (z,1;\ z+1) \uparrow \ldots$

para todo $z \in \mathbf{Z}$

5 — SUB-GRADUACIONES BINARIAS SUCESIVAS

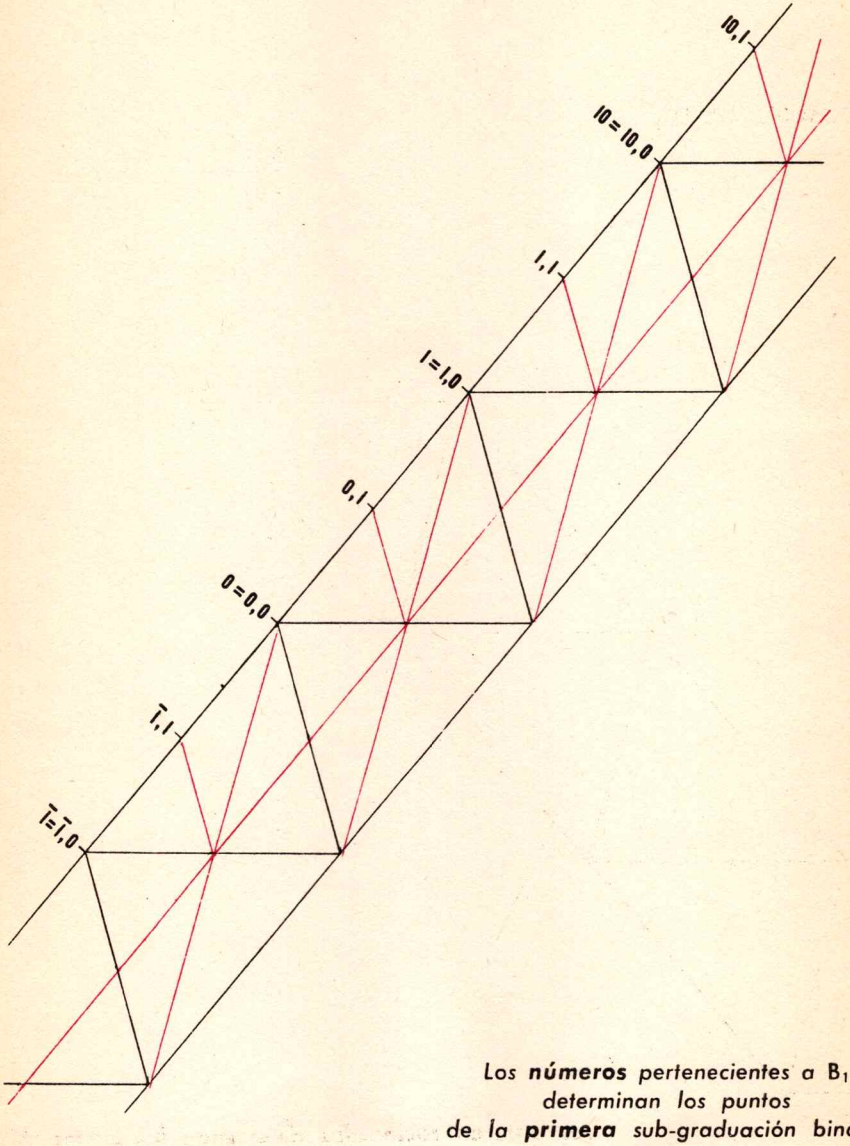
LA GRADUACIÓN DE D_{01}



Los ***enteros racionales*** *determinan los puntos de la graduación de* D_{01}

FIG. 90

PRIMERA SUB-GRADUACIÓN BINARIA DE D_{01}

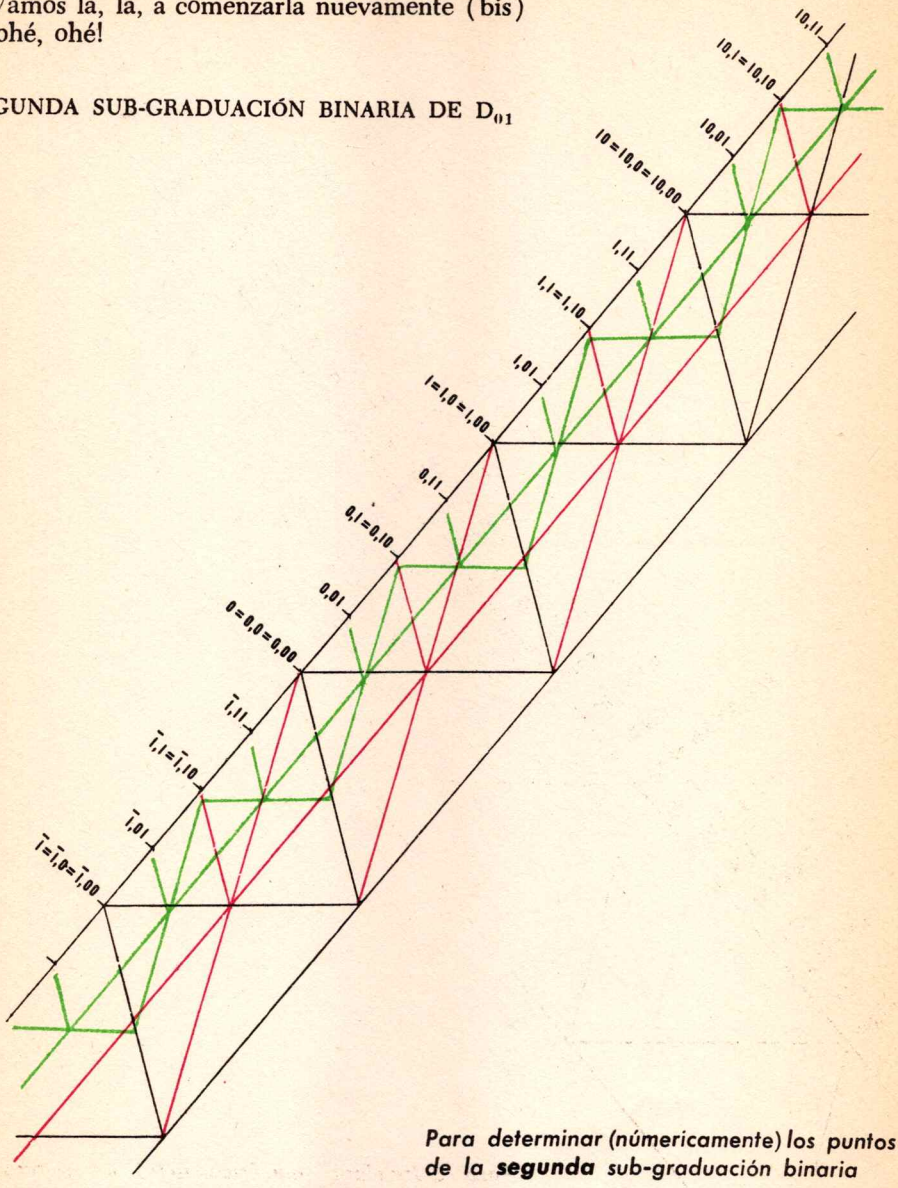


Los ***números*** *pertenecientes a* B_1
determinan los puntos
de la ***primera*** *sub-graduación binaria*
de D_{01}

FIG. 91

Si esta canción los divierte, (bis)
Vamos la, la, a comenzarla nuevamente (bis)
¡ohé, ohé!

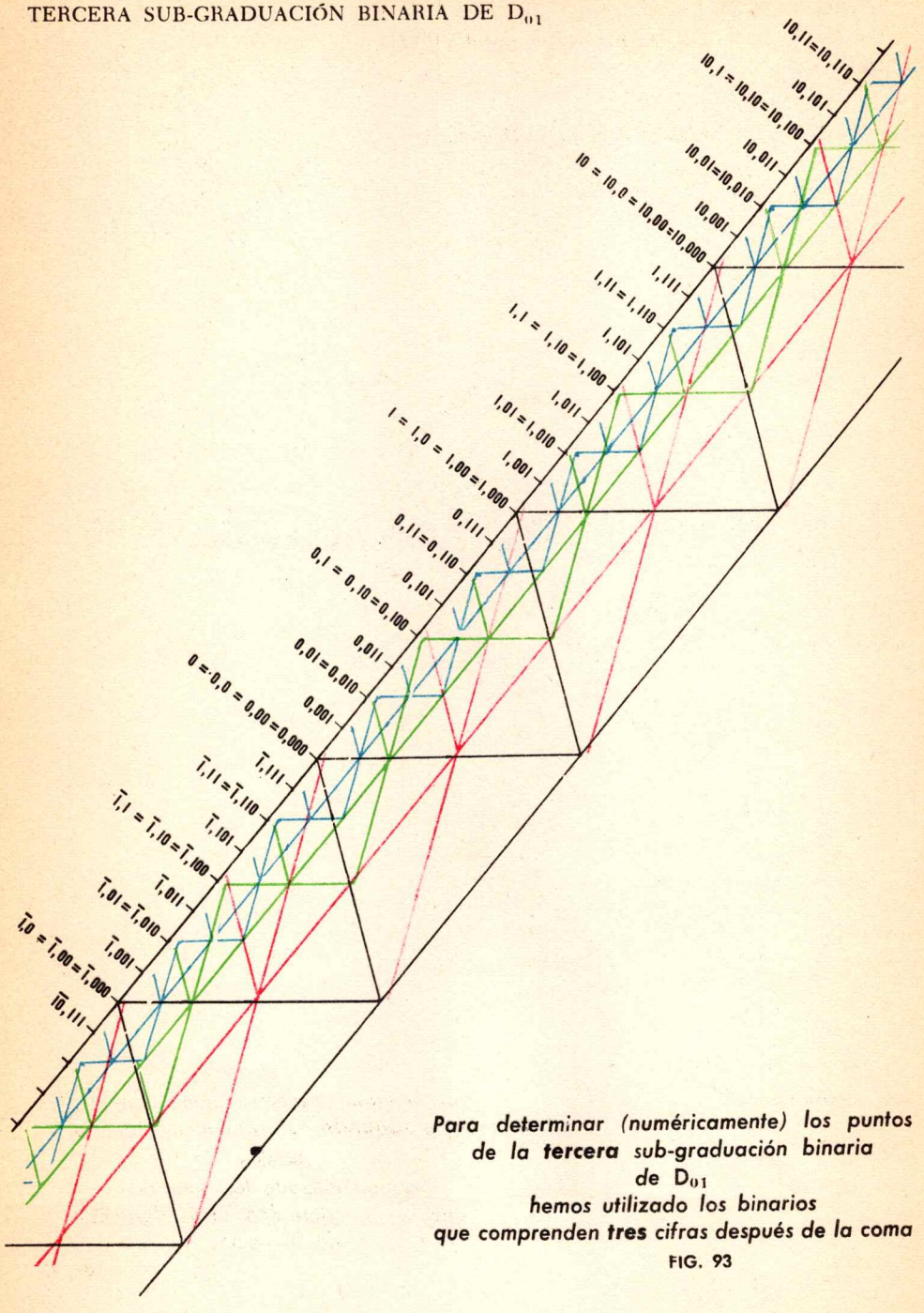
SEGUNDA SUB-GRADUACIÓN BINARIA DE D_{01}



Para determinar (númericamente) los puntos de la ***segunda*** *sub-graduación binaria de* D_{01} *hemos utilizado los binarios que comprenden* ***dos*** *cifras después de la coma.*

FIG. 92

TERCERA SUB-GRADUACIÓN BINARIA DE D_{01}



Para determinar (numéricamente) los puntos de la ***tercera*** *sub-graduación binaria de* D_{01} *hemos utilizado los binarios que comprenden* ***tres*** *cifras después de la coma*

FIG. 93

CUARTA SUB-GRADUACIÓN BINARIA DE D_{01}

Para determinar (numéricamente) los puntos de la ***cuarta*** *sub-graduación binaria de* D_{01} *se utilizan los binarios que comprenden* ***cuatro*** *cifras después de la coma.*

QUINTA SUB-GRADUACIÓN BINARIA DE D_{01}

Para determinar (numéricamente) los puntos de la ***quinta*** *sub-graduación binaria de* D_{01} *se utilizan los binarios que comprenden* ***cinco*** *cifras después de la coma*

etc. ... etc. ...

Consideramos **todas** las subdivisiones binarias sucesivas.

Aparecerán como marcas: **todos los binarios limitados,** es decir, todos los binarios que comprenden un número finito de cifras 0;1 después de la coma.

6 – NÚMEROS BINARIOS LIMITADOS

Si un punto pertenece a una sub-graduación binaria,

Entonces pertenece a **todas** las sub-graduaciones binarias siguientes.

Si un punto pertenece a una sub-graduación binaria,

Entonces hay **infinitos** binarios limitados que determinan ese punto.

111,100 = 111,1000 = 111,10000 = 111,100000 = ...
111,011111 = ...
111,01111 = 111,011110 = ...
111,011101 = ...
111,0111 = 111,01110 = 111,011100 = ...
111,011011 = ...
111,01101 = 111,011010 = ...
111,011001 = ...
111,011 = 111,0110 = 111,01100 = 111,011000 = ...
111,010111 = ...
111,01011 = 111,010110 = ...
111,010101 = ...
111,0101 = 111,01010 = 111,010100 = ...
111,010011 = ...
111,01001 = 111,010010 = ...
111,010001 = ...
111,010 = 111,0100 = 111,01000 = 111,010000 = ...

Esta vez también, **creamos los números a partir de los binarios limitados.** Extendemos la convención introducida en el parágrafo 4.

DEFINICIÓN — *Dos binarios limitados son iguales y designan el mismo* **número**

ssi

determinan el mismo punto de D_{01}

El binario 0,01 designa el número un cuarto
El binario 0,001 designa el número un octavo
El binario 0,0001 designa el número un dieciseisavos
El binario 0,00001 designa el número un treintaidosavos

etc.

DEFINICIÓN — *Los números designados por binarios limitados se llaman*

números binarios limitados

El conjunto de números binarios limitados se anota B

$B = \{ z, f \mid z \in \mathbf{Z} \text{ y } f \text{ es una sucesión finita de 0 y de 1} \}$

$$\omega \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}$$

La igualdad de dos binarios limitados ha sido definida por medio de la recta D_{01} Sin embargo, no es necesario recurrir a la recta D_{01} para decidir si dos binarios limitados designan el mismo número. Ello se lee directamente sobre los binarios mismos.

$$z, f = z, f0 = z, f00 = z, f000 = z, f0000 = \ldots$$

El orden total de la recta D_{01} permite proveer a B de un orden total. Aquí también es innecesario recurrir a la recta D_{01} para decidir cuál de dos binarios limitados dados es mayor.

La respuesta se lee directamente sobre los mismos binarios limitados.

El orden $\leqslant$ así definido se llama **orden natural de B.**

$$\ldots \overline{10} < \overline{1} < 0 < 1 < 10 < 11 < 100 < 101 < 110 < \ldots$$

$$\ldots 111,1 < 1000 < 1000,1 < 1001 < 1001,1 < 1010 < 1010,1 < \ldots$$

$$\ldots \overline{1001} < \overline{1001},01 < \overline{1001},1 < \overline{1001},11 < \overline{1000} < \overline{1000},10 < \ldots$$

$$\ldots \overline{1},101 < \overline{1},11 < \overline{1},111 < 0 < 0,001 < 0,01 < 0,011 < 0,1 < 0,101 < \ldots$$

EJERCICIOS

1. Todo número perteneciente a B\Z puede designarse mediante un binario limitado cuya última cifra después de la coma es 1

2. Hay infinitos binarios limitados iguales a un binario limitado dado.

3. **Si** dos binarios limitados son iguales,
   Entonces comprenden el mismo número de 1

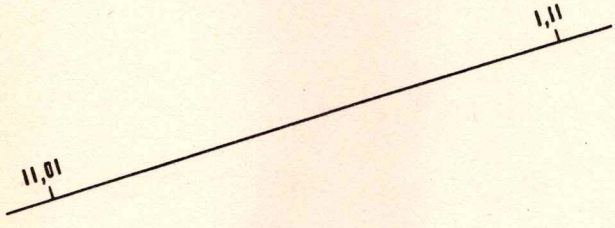
4. $\#\{\ 101,101;\ \overline{10},0001;\ \overline{10},0101;\ 101,10100;\ \overline{10},0101000\ \} =$

5. $\#\{\ \overline{111},111000111;\ \overline{111},111000111000;\ \overline{111},111000111000111;\ \overline{111},111000111000111000\ \} =$

6. { 0,1; 0,101; 0,101010; 0,1010; 0,10; 0,10101 }
   da lugar a la fórmula
   $0,1 = 0,10 < 0,101 = 0,1010 < 0,10101 = 0,101010$
   Procede de la misma manera:

   { $\overline{11}$,1011; $\overline{11}$,1111; $\overline{11}$,1101; $\overline{11}$,1110; $\overline{11}$,10010; $\overline{11}$,1001 }.

7. He aquí un fragmento de sub-graduación.



Construye el punto marcado 10,10

FIG. 94

8. El mismo ejercicio.

Construye el punto marcado $\bar{1},001$

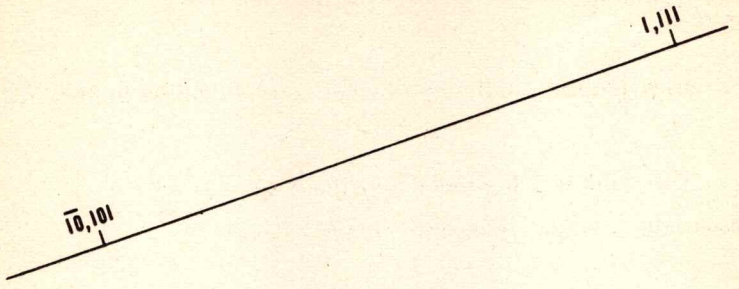


FIG. 95

9. He aquí un entero racional z y una sucesión finita f de 0 y de 1
Habiendo fijado una vez por todas la referencia de D_{01},
¿cuál es el número binario limitado que determina el punto medio del segmento $[z, f; z, f1]$. ?

SIMON STEVIN (1548-1620)

Nosotros hemos utilizado la numeración de posición de base dos y la de base diez para representar los números reales y, particularmente, los números naturales.

A partir del cuarto milenio a C., los caldeos disponían, para los cálculos astronómicos, de un sistema de numeración de posición de base sesenta que comprendía incluso las fracciones sexagesimales.

Los babilonios utilizaban para las transacciones comerciales corrientes un sistema de numeración de posición de base diez.

Los griegos no utilizaron jamás la numeración de posición. Ésta reaparece a partir del siglo V en la India, bajo forma decimal, para los enteros naturales. Luego, en el siglo VIII, se transmitió a los árabes y en el siglo XII llega a Europa.

Solo en el siglo XVI, el belga Simon Stevin extendió el sistema de numeración indo-árabe a las fracciones decimales. Simon Stevin no utilizaba la coma, pero indicaba de una u otra manera la ubicación de las cifras.

Por ejemplo, el número 89,233 se escribía en una de las formas

89 ⓪ 2 ① 3 ② 3 ③ 89 ⓪ 2 ① 3 ② 3 ③ 89 $_{⓪}{}^{2}{}_{①}{}^{3}{}_{②}{}^{3}{}_{③}$

o brevemente

89233 ③ 89 ⓪ 233 89 $_{⓪}$ 233

La última forma es la que más se asemeja a la notación moderna.

Señalemos que los anglosajones invierten el papel que nosotros hacemos desempeñar al punto y a la coma. Ellos escriben 25,257,383,212·227,325 donde nosotros escribimos 25.257.383.212,227.325
Ellos anotan .75 la fracción 0,75

Simon Stevin nació en Brujas en 1548. Se inició como empleado en un comercio de Amberes, y varias de sus obras están influidas por dichas funciones comerciales. En 1582 publicó una tabla de intereses, que resultó de gran valor para los comerciantes.

En su obra *De Thiende* escrita en neerlandés en 1585 y pronto traducida al latín y al francés, mejora el sistema de numeración indo-árabe de la manera que indicamos, y enuncia las reglas de cálculo numérico que aún se utilizan.

Simon Stevin se instaló más tarde en Holanda, donde, gracias a su amistad con Maurice de Nassau, príncipe de Orange, llega a ser ingeniero de diques y finalmente cuartel-maestre general del ejército holandés.

Fuera de sus trabajos matemáticos, publicó diversas obras de mecánica y de arte militar. Cabe descatar que es el inventor de los carros de velas.

Murió en La Haya en 1620.

6

Números reales

1 — EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS BINARIOS LIMITADOS NO PERMITE DETERMINAR TODOS LOS PUNTOS DE LA RECTA D_{01}

Los puntos de las sub-graduaciones binarias sucesivas de D_{01} se encuentran cada vez más próximas.

Entre dos puntos consecutivos de la graduación inicial, construimos, sub-graduando, un conjunto infinito de puntos intermedios.

Mostremos que sin embargo existen puntos de la recta D_{01} que no pertenecen a ninguna de las sub-graduaciones binarias sucesivas de D_{01}

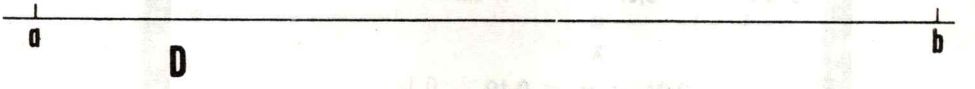


FIG. 96

Construye el punto x tal que $3\,\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{ab}$

Marca 0 en *a* y 1 en *b*

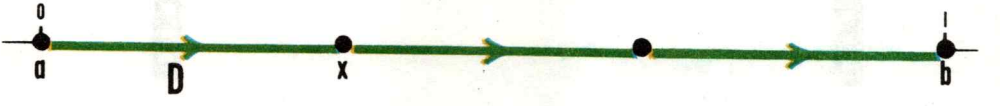


FIG. 97

El filme siguiente establece que el punto x no pertenece a ninguna de las subgraduaciones binarias sucesivas de D_{01}

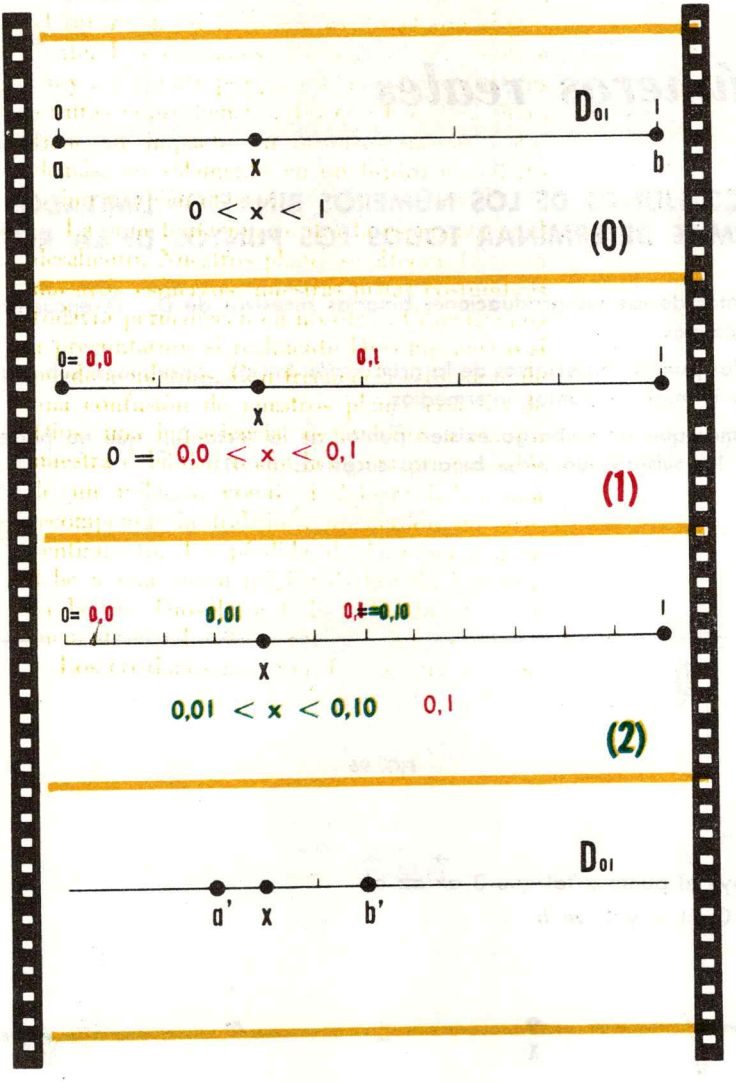


FIG. 98

1. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS BINARIOS LIMITADOS NO PERMITE DETERMINAR TODOS LOS PUNTOS DE LA RECTA D_{01}

— Observa bien este film.

Cómo se pasa de la fórmula (0) $0 < x < 1$

a la fórmula (1) $0 = 0{,}0 < x < 0{,}1$

— Se conserva el primer número $0 = 0{,}0$

— Cómo se pasa de la fórmula (1) $0{,}0 < x < 0{,}1$

a la fórmula (2) $0{,}01 < x < 0{,}10 = 0{,}1$

— Se conserva el segundo número $0{,}10 = 0{,}1$

— La cuarta imagen del film muestra que en el momento de escribir la fórmula (2), nos encontramos en la misma situación que en el momento de escribir la fórmula (0) (los puntos *a'* y *b'* están reemplazando a los puntos *a* y *b*).

¿Cómo se pasará de la fórmula (2) a la fórmula (3)

y de la fórmula (3) a la fórmula (4)?

— De (2) a (3), conservando el primer número.

De (3) a (4), conservando el segundo número.

y así siguiendo ...

$$0 < x < 1 \qquad (0)$$

$$0{,}0 < x < 0{,}1 \qquad (1)$$

$$0{,}01 < x < 0{,}10 \qquad (2)$$

$$0{,}010 < x < 0{,}011 \qquad (3)$$

$$0{,}0101 < x < 0{,}0110 \qquad (4)$$

$$0{,}01010 < x < 0{,}01011 \qquad (5)$$

etc.

Estas fórmulas muestran bien que el punto x no pertenece a ninguna sub-graduación binaria de D_{01}

l.q.q.d.

El conjunto de números binarios limitados no permite determinar todos los puntos de la recta D_{01}

2 — CÓMO DETERMINAR UN PUNTO DE UNA RECTA GRADUADA

— He aquí la recta D_{01}
Piensa en un punto p de la recta D
Indícame su posición aproximada utilizando la graduación de D_{01}

— $p \in 111,\ldots = [111\ ;\ 1000]$

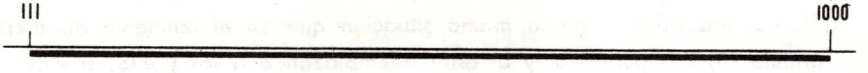


FIG. 99

— Precisa la posición de p utilizando la primera sub-graduación binaria de D_{01}

— $p \in 111,1\ldots = [111,1\ ;\ 1000]$

FIG. 100

— Precisa mejor la posición de p utilizando las sub-graduaciones binarias sucesivas de D_{01}

— $p \in 111,10\ldots = [111,10\ ;\ 111,11]$

FIG. 101

$$p \in 111{,}100\ldots = [111{,}100\ ;\ 111{,}101]$$

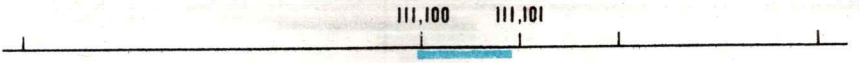


FIG. 102

$$p \in 111{,}1001\ldots = [111{,}1001\ ;\ 111{,}1010]$$

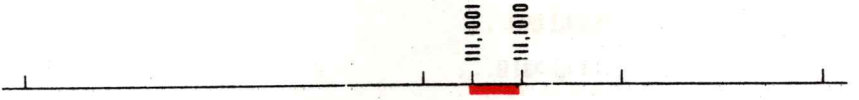


FIG. 103

$$p \in 111{,}10010\ldots = [111{,}10010\ ;\ 111{,}10011]$$

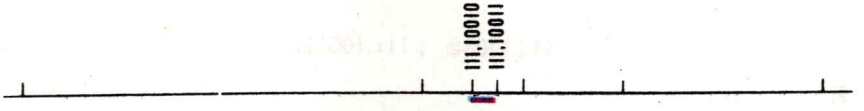


FIG. 104

etc. ... etc. ...

— Recapitula.

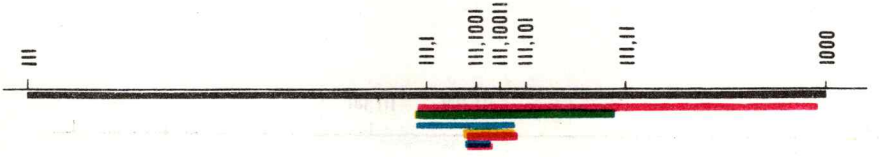


FIG. 105

$p \in$ 111,...

$p \in$ 111,1...

$p \in$ 111,10...

$p \in$ 111,100...

$p \in$ 111,1001...

$p \in$ 111,10010...

$p \in$ ... etc. ...

— Estas informaciones están condensadas en el **binario ilimitado**

111,10010 etc.

Describamos, de manera expeditiva, el método utilizado para formar este binario ilimitado, indicando cómo determinar la sexta cifra después de la coma.

El **binario ilimitado** 111,10010 determina un punto de la quinta sub-graduación.

Se construye el punto medio m del segmento

[111,10010 ; 111,10011]

- **Si** $p < m$,
  Entonces la sexta cifra después de la coma es 0.
- **Si** $p > m$,
  Entonces la sexta cifra después de la coma es 1
- **Si** $p = m$,
  Entonces se puede elegir entre 0 y 1 para la sexta cifra.

3 — AXIOMA DE CONTINUIDAD

— Acabas de ver que precisar la posición de un punto utilizando las sub-graduaciones binarias sucesivas, consiste en darse un binario ilimitado.

Démonos un binario ilimitado

$$\overline{1}1,0110011111011000111111001000001101110000111 \quad \text{etc.}$$

¿Permite este binario ilimitado determinar un punto q de la recta D_{01}?

$$q \in \overline{1}1,\ldots = [\overline{1}1\ ;\ \overline{1}0]$$

FIG. 106

$$q \in \overline{1}1,0\ldots = [\overline{1}1,0\ ;\ \overline{1}1,1]$$

FIG. 107

$$q \in \overline{1}1,01\ldots = [\overline{1}1,01\ ;\ \overline{1}1,10]$$

FIG. 108

$$q \in \overline{1}1,011\ldots = [\overline{1}1,011\ ;\ \overline{1}1,100]$$

FIG. 109

$$q \in \overline{1}1{,}0110\ldots = [\overline{1}1{,}0110\ ;\ \overline{1}1{,}0111]$$

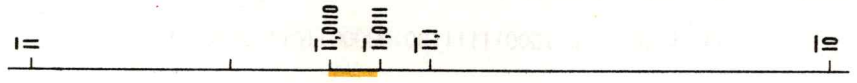


FIG. 110

$$q \in \overline{1}1{,}01100\ldots = [\overline{1}1{,}01100\ ;\ \overline{1}1{,}01101]$$

FIG. 111

$$q \in \overline{1}1{,}011001\ldots = [\overline{1}1{,}011001\ ;\ \overline{1}1{,}011010]$$

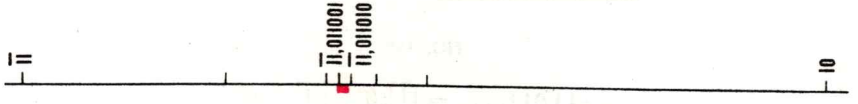


FIG. 112

etc. ... etc. ...

Resumiendo:

$\overline{11}{,}011001$ etc.

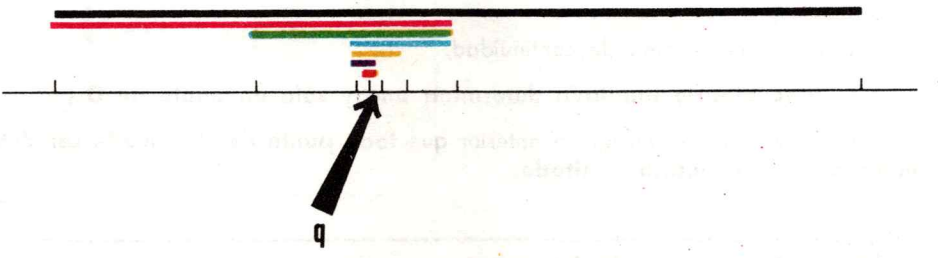


FIG. 113

Todo binario ilimitado define una sucesión infinita de **segmentos cerrados encajados** (es decir, tales que cada uno de ellos está incluido en el anterior). Todo segmento de la sucesión (distinto del primero) tiene como extremos: el punto medio y un extremo del segmento anterior.

Si ningún punto perteneciese a la vez a todos estos segmentos,

Entonces ... la recta D ¡estaría agujereada!

Admitiremos que las rectas no están agujereadas, que son **continuas.**

Nos atrevemos a admitir que existe uno y solo un punto perteneciente a todos estos segmentos cerrados encajados.

DEFINICIÓN

He aquí una sucesión infinita de segmentos cerrados S_0, S_1, S_2, ...

Diremos que esta sucesión es una ***sucesión binaria de segmentos cerrados encajados,***

ssi

cada uno de los segmentos S_1, S_2, ... *tiene como extremos: el punto medio y un extremo del segmento anterior.*

AXIOMA II 12

Si $S_0, S_1, S_2, \ldots$ ***es una sucesión binaria de segmentos cerrados encajados***

Entonces ***existe uno y sólo un punto perteneciente a todos los segmentos*** $S_0, S_1, S_2, \ldots$

Axioma de continuidad

En virtud del axioma de continuidad,

todo binario ilimitado determina uno y sólo un punto de D_{01}

Hemos visto en el parágrafo anterior que **todo punto de D_{01} puede ser determinado por un binario ilimitado.**

Todo binario ilimitado determina uno y sólo un punto de D_{01}
Todo punto de D_{01} puede ser determinado por un binario ilimitado.

Falta saber cuáles son los puntos de D_{01} que pueden ser determinados por varios binarios ilimitados.

4 — BINARIOS LIMITADOS E ILIMITADOS

— He aquí un punto p de D_{01}

En el parágrafo 2 vimos cómo encontrar todo binario ilimitado que determina este punto.

Si p no pertenece a ninguna de las sub-graduaciones binarias sucesivas de D_{01}

Entonces en cada etapa la cifra siguiente está enteramente determinada.

Si **p no pertenece a ninguna de las sub-graduaciones binarias sucesivas de D_{01}**
Entonces **existe uno y sólo un binario ilimitado que lo determina.**

Falta examinar la situación que se presenta cuando p es un punto de una de las sub-graduaciones binarias de D_{01}

Sabemos que en este caso existen infinitos binarios limitados iguales que determinan el punto p.

Para fijar las ideas, supongamos que el punto está determinado por

11,011 = 11,0110 = 11,01100 = 11,011000 = 11,0110000 = ...

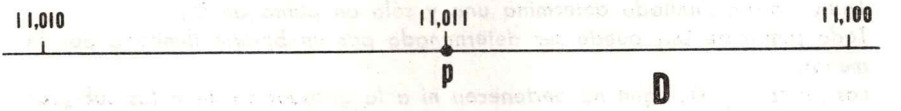


FIG. 114

$p \in$ 11,011 ...

Luego p está determinado por un binario ilimitado que comienza por

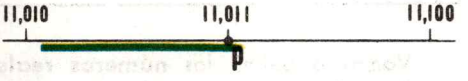
11,011

Busquemos las cifras siguientes

Todas las cifras siguientes son 0
Luego p está determinado por el binario ilimitado

11,01100000000000000000 ... 00000 ...

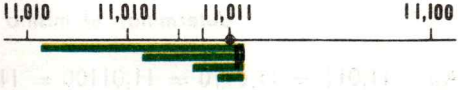
$p \in$ 11,010 ...



Luego p está determinado por un binario ilimitado que comienza por

11,010

Busquemos las cifras siguientes



Todas las cifras siguientes son 1
Luego p está determinado por el binario ilimitado

11,0101111111111111111111 ... 1111 ...

FIG. 115

El punto de D_{01} determinado por los binarios limitados

11,011 = 11,0110 = 11,01100 = 11,011000 = 11,0110000 = ...

está también determinado por los únicos binarios ilimitados

11,01100000000000000000000000000000000000000000000000 ... 000 ...

y

11,0101111111111111111111111111111111111111111111111 ... 111 ...

5 — NÚMEROS REALES

Todo binario limitado determina uno y sólo un punto de D_{01}
Todo binario ilimitado determina uno y sólo un punto de D_{01}
Todo punto de D_{01} *puede ser determinado por un binario ilimitado por lo menos.*
Los puntos de D_{01} *que no pertenecen ni a la graduación, ni a las sub-graduaciones binarias sucesivas de* D_{01} *son determinados por uno y sólo un binario ilimitado.*
Los puntos que pertenecen a la graduación de D_{01} *o a una de sus sub-graduaciones binarias sucesivas son determinados por un número infinito de binarios limitados y por dos binarios ilimitados.*

Vamos a definir los **números reales** a partir de los binarios limitados e ilimitados utilizando un método al cual ahora ya estamos acostumbrados.

DEFINICIÓN —

Dos binarios limitados o ilimitados son iguales y definen el mismo ***número real***

ssi

determinan el mismo punto de la recta D_{01}

Así $11{,}011 = 11{,}0110 = 11{,}01100 = 11{,}011000 = 11{,}0110000 = \ldots$
$= 11{,}011000000000000000000000000000000000 \ldots 000 \ldots$
$= 11{,}010111111111111111111111111111111111 \ldots 111 \ldots$

Si $z \in Z$ y f designa una sucesión finita de 0 y de 1,
Entonces $z,f1 = z,f10 = z,f100 = z,f1000 = z,f10000 = \ldots$
$= z,f100000000000000000000000000000000000 \ldots 000 \ldots$
$= z,f011111111111111111111111111111111111 \ldots 111 \ldots$

Para definir la igualdad de binarios limitados o ilimitados, hemos utilizado D_{01}

No es necesario recurrir a la recta para decidir si dos binarios limitados o ilimitados son iguales.

Ello se lee directamente sobre los binarios mismos . . .
siempre que se conozca la sucesión completa de sus cifras.
El conjunto de números reales será anotado **R**

$$\omega \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{R}$$

En virtud de la definición de números reales:

Todo número real determina uno y sólo un punto de la recta D_{01}
Todo punto de D_{01} está determinado por uno y sólo un número real.

DEFINICIÓN — *El número real que determina el punto* $\vec{p} \in D_{01}$ *se llama* ***abscisa*** *de* $\vec{p}$ *(con respecto a la referencia (0;1) de D)*

La aplicación: $D_{01} \to \mathbf{R} : \vec{p} \to$ abscisa de $\vec{p}$ es una biyección.

6 — ORDEN DE LOS REALES

DEFINICIÓN

He aquí $a, b \in \mathbf{R}$ y $\vec{a}, \vec{b}$ los puntos de D_{01} de abscisas a, b

$$a \leqslant b \iff \vec{a} \leqslant \vec{b}$$

La biyección $D_{01} \to \mathbf{R} : \vec{p} \to$ abscisa de $\vec{p}$
transporta, por consiguiente, el orden total de D_{01} sobre **R** y

$$10{,}0 < 10{,}1 < 10{,}11 < 10{,}1101 < 10{,}11011 \text{ etc.} < 10{,}1110110001 \text{ etc.}$$

Como ves, para decidir cuál es el mayor entre dos números reales no es necesario recurrir a la recta D_{01}

Ello se lee directamente sobre los binarios que representan estos reales
... siempre que conozcas un número suficiente de cifras de dichos binarios.

PROPOSICIÓN 1

La relación $\leqslant$ *es un orden total sobre* **R**
Este orden que está enteramente definido por **R** *mismo, se llama orden natural de* **R**

Si *para todo* $r \in \mathbf{R}$ *se anota* $\vec{r}$ *el punto de* D_{01} *de abscisa* r
Entonces *la biyección* $\mathbf{R} \to D_{01} : r \to \vec{r}$ *es* ***creciente***

DEFINICIÓN — Para todo número real r :

r es ***positivo*** $\iff$ $r \geqslant 0$

r es ***negativo*** $\iff$ $r \leqslant 0$

r es ***estrictamente positivo*** $\iff$ $r > 0 \iff$ el signo de r es $+$

r es ***estrictamente negativo*** $\iff$ $r < 0 \iff$ el signo de r es $-$

NOTACIONES

$\mathbf{R}^+$ designa el conjunto de reales positivos.

$\mathbf{R}^-$ designa el conjunto de reales negativos.

$\mathbf{R}_0^+$ designa el conjunto de reales estrictamente positivos.

$\mathbf{R}_0^-$ designa el conjunto de reales estrictamente negativos.

Intervalos o segmentos incluidos en R

DEFINICIÓN

Si a, b *designan reales tales que* $a \leqslant b$,

Entonces
$$[a\,,\,b] = [b\,,\,a] = \{r \in \mathbf{R} \mid a \leqslant r \leqslant b\}$$
$$]a\,,\,b[=]b\,,\,a[= \{r \in \mathbf{R} \mid a < r < b\}$$
$$[a\,,\,b[=]b\,,\,a] = \{r \in \mathbf{R} \mid a \leqslant r < b\}$$
$$]a\,,\,b] = [b\,,\,a[= \{r \in \mathbf{R} \mid a < r \leqslant b\}$$

$[a\,,\,b]$ *es el* ***segmento (o intervalo) cerrado de extremos*** a, b

$]a\,,\,b[$ *es el* ***segmento (o intervalo) abierto de extremos*** a, b

$[a\,,\,b[$ *es el* ***segmento de extremos*** a, b, ***cerrado*** *en* a, ***abierto*** *en* b

$]a\,,\,b]$ *es el* ***segmento de extremos*** a, b, ***abierto*** *en* a, ***cerrado*** *en* b

Se dice también que los segmentos (o intervalos) $[a\,,\,b[$ *y* $]a\,,\,b]$ ***son semi-abiertos*** (... o ***semi-cerrados***).

Las imágenes de los conjuntos $[a\,,\,b]$, $]a\,,\,b[$, $[a\,,\,b[$, $]a\,,\,b] \subset \mathbf{R}$ por la biyección

$$\mathbf{R} \to D_{01} \quad : \quad r \to \vec{r}$$

son los segmentos $[\vec{a}\,,\,\vec{b}]$, $]\vec{a}\,,\,\vec{b}[$, $[\vec{a}\,,\,\vec{b}[$, $]\vec{a}\,,\,\vec{b}] \subset D_{01}$ lo cual justifica la terminología introducida más arriba.

EJERCICIOS

1. $111,1111111111111111 \ldots 111 \ldots = 1000 = 1000,0000000000 \ldots 000 \ldots$

2. He aquí dos puntos distintos a y b de la recta D
   Construye x tal que $3\vec{ax} = \vec{ab}$
   Marca 0 en a y 1 en b
   La abscisa de x es $0,0101010101010101010101010101 \ldots 01 \ldots$
   Construye y tal que $\vec{ay} = 2\vec{ax}$
   La abscisa de y es $0,1010101010101010101010101010101 \ldots 01 \ldots$
   ¿Cuál es la abscisa del punto z tal que $4\vec{az} = \vec{ab}$?

3. $\#\{\overline{10}1,011; \overline{10}1,0101111111 \ldots 111 \ldots; \overline{10}1,0110000\} = 1$

4. $\overline{1},1111111111 \ldots 11111 \ldots = 0$

5. Sobre D_{01}, construye el punto de abscisa

   $$101,0110110110 \ldots 01101101 \ldots$$

6. Un binario ilimitado define un número binario limitado

   ssi

   termina en una sucesión ininterrumpida de 0 o en una sucesión ininterrumpida de 1

7. $r = 1001,100110$ etc.
   Entre las cifras no escritas figura un 1
   Entonces $1001,100110 < r$

8. $r = \overline{11},0110001$ etc.
   Se te indica que entre las cifras no escritas figura un 0,
   Entonces $r < \overline{11},011001$

9. **Si** $a = 101$

$b = \overline{11},0110101$

$c = 101,00011$

$d = 101,000101111 \ldots 111 \ldots$

$e = \overline{11},011001$

$f = 100,111111 \ldots 11111 \ldots$

$g = 101,001$

$h = \overline{11},01100100$

$l = \overline{11},011001111111 \ldots 11111 \ldots$

$m = 101,01$

Entonces $e = h < b = l < a = f < c = d < g < m$

10. **Si** $a = 0,00100100 \ldots 00100 \ldots$

$b = 0,0001$

$c = 0,00100101000100100 \ldots 00100 \ldots$

$d = 0,00100100 \ldots 00100$

$e = 0,00001111111 \ldots 11111 \ldots$

$f = 0,00100100 \ldots 00100011111 \ldots 11111 \ldots$

$g = 0,00010000010000 \ldots 000 \ldots$

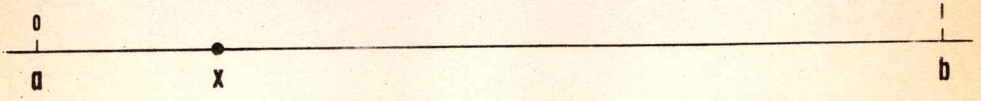
Entonces ....

11. Sobre una hoja grande de papel, marca dos puntos a y b de la recta D situadas a 40 cm uno del otro.

Construye el punto x tal que $5\ \vec{ax} = \vec{ab}$

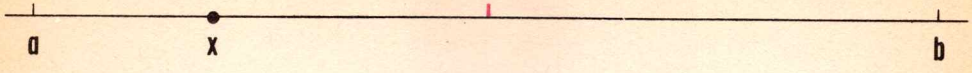
Si marcas 0 en a y 1 en b

Entonces la abscisa de x es $0,00110011 \ldots 0011 \ldots$



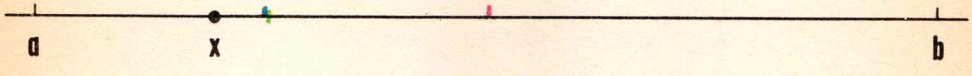
abscisa de $x = 0$, etc.

FIG. 116



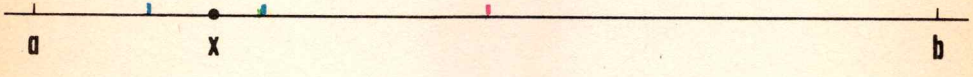
abscisa de $x = 0,0$ etc.

FIG. 117



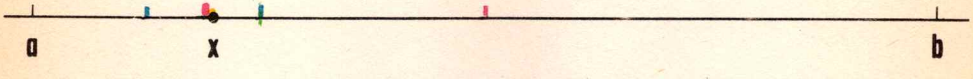
abscisa de $x = 0,00$ etc.

FIG. 118



abscisa de $x = 0,001$ etc.

FIG. 119



abscisa de $x = 0,0011$ etc.

FIG. 120

Si has dibujado con suficiente precisión, comprobarás que nos encontramos en una situación análoga a la situación inicial.
Luego

$$\text{abscisas de } x = 0{,}0011.0011.0011 \ldots 0011 \ldots$$

Estudiaremos más adelante un método que nos permitirá hallar este resultado mediante cálculo, sin tener que dibujar.

12. Los mismos datos que en el ejercicio 11.

Construye y tal que $\overrightarrow{ay} = 2\,\overrightarrow{ax}$
¿Cuál es la abscisa de y?

13. Los mismos datos que en el ejercicio 11.
Construye el punto z tal que $\overrightarrow{az} = 4\,\overrightarrow{ax}$
¿Cuál es la abscisa de z?

14. Los mismos datos que en el ejercicio 11.
Construye el punto t tal que $\overrightarrow{at} = 3\,\overrightarrow{ax}$
La abscisa de t es $0{,}1001.1001.1001. \ldots 1001.1001 \ldots$

15. He aquí los reales r, s tales que $r < s$
Existe un número binario limitado l tal que $r < l < s$

16. Encuentra un binario limitado l entre los reales
$r = 0{,}0101010101 \ldots 0101 \ldots$
$s = 0{,}1001\,1001 \ldots 1001 \ldots$

17. **Si** r es un real tal que
$0 \leqslant r \leqslant 0{,}1$
$0 \leqslant r \leqslant 0{,}01$
$0 \leqslant r \leqslant 0{,}001$
...
$0 \leqslant r \leqslant 0{,}0 \ldots 00 \ldots 01$ ... etc.

Entonces $r = 0$

18. 0 es el único número que es positivo y negativo

19. $\mathbf{R}^+ \cap \mathbf{R}^- = \{0\}$

20. $\{\mathbf{R}_0^+, \mathbf{R}^-\}; \{\mathbf{R}_0^-, \mathbf{R}^+\}; \{\mathbf{R}_0^-, \{0\}, \mathbf{R}_0^+\}; \{\mathbf{R}\}$ son particiones de $\mathbf{R}$

21. La imagen de $\mathbf{R}^+$ por la biyección $\mathbf{R} \to D_{01} : r \to \overrightarrow{r}$
es una semirrecta cerrada de origen 0

22. Para todo $r \in \mathbf{R}$: $[r, r] = \{r\}$
$]r, r[= \phi = [r, r[=]r, r]$

23. $\{[z, z + 1[\mid z \in \mathbf{Z}\}$ es una partición de $\mathbf{R}$

24. $\{[2z, 2z + 2[\mid z \in \mathbf{Z}\}$ es una partición de $\mathbf{R}$

25. La intersección de dos segmentos cerrados es un segmento cerrado o el conjunto vacío.

7 — DECIMALES LIMITADOS E ILIMITADOS

En lugar de sub-graduaciones binarias de la recta D_{01} se utilizan a menudo sub-graduaciones decimales.

¿Cómo construir la primera sub-graduación decimal?

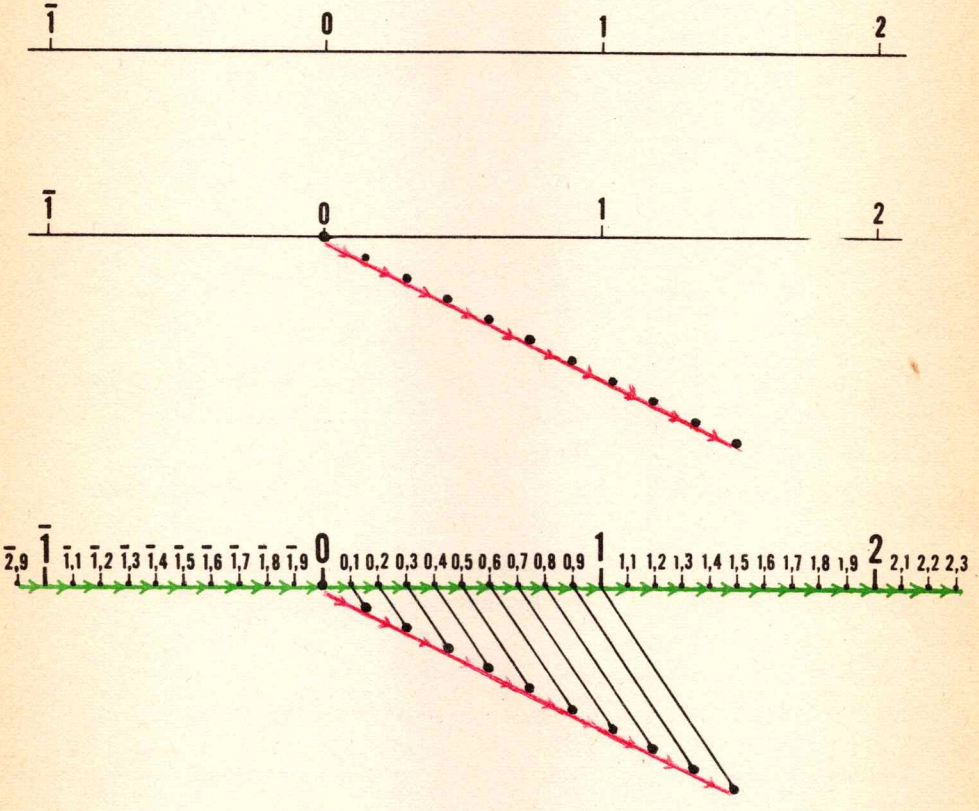


FIG. 121

Se procede del mismo modo para las sub-graduaciones decimales siguientes.

Se obtienen así como marcas todos los **decimales limitados.**

Como el detalle del dibujo se hace demasiado pequeño, utilizaremos ampliaciones fotográficas.

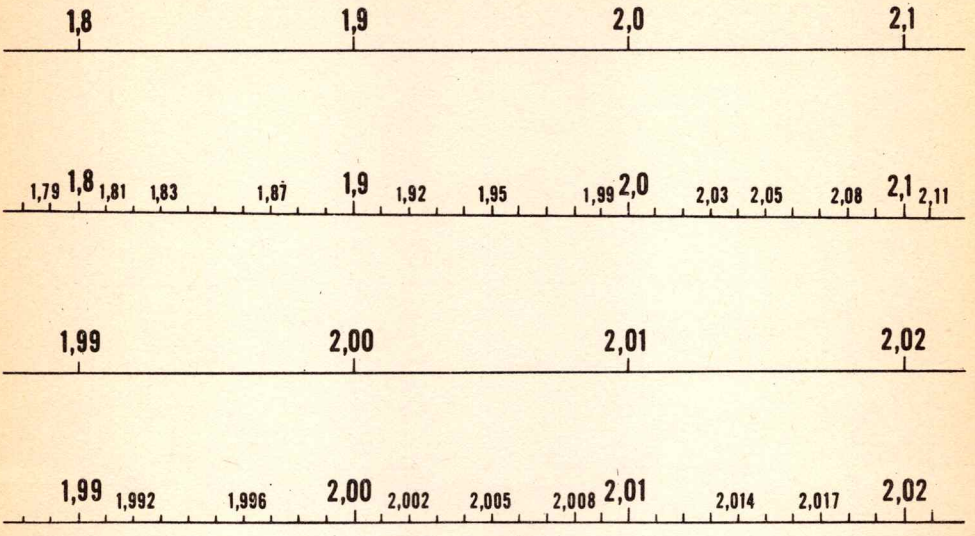


FIG. 122

Todo punto x perteneciente a D_{01} define una **sucesión decimal infinita de segmentos cerrados encajados.**

Por ejemplo, $x \in 2,\ldots = [2\ ;\ 3]$
$x \in 2{,}0\ldots = [2{,}0\ ;\ 2{,}1]$
$x \in 2{,}01\ldots = [2{,}01\ ;\ 2{,}02]$
$x \in 2{,}014\ldots = [2{,}014\ ;\ 2{,}015]$ etc.

Admitiremos la **versión decimal del axioma de continuidad.**

AXIOMA Π 12

Si $S_0, S_1, S_2, \ldots$ ***es una sucesión decimal de segmentos cerrados encajados***

Entonces ***existe uno y sólo un punto perteneciente a todos los segmentos*** $S_0, S_1, S_2, \ldots$

Axioma de continuidad

Como consecuencia de este axioma, el punto x considerado más arriba está enteramente determinado por el **decimal ilimitado**

2,014 etc.

*
* *

El punto *y* marcado 3,34 pertenece a una de las sub-graduaciones decimales de D_{01}

Está determinado por los decimales limitados

3,34; 3,340; 3,3400; 3,34000; 3,340000; etc.

Como

$y \in 3{,}34\ldots$
$y \in 3{,}340\ldots$
$y \in 3{,}3400\ldots$
$y \in 3{,}34000\ldots$
$y \in 3{,}340000\ldots$
$y \in 3{,}3400000\ldots$
etc.

el punto *y* está también determinado por el decimal ilimitado

3,3400000000000 ... 000 ...

$y \in 3{,}33\ldots$
$y \in 3{,}339\ldots$
$y \in 3{,}3399\ldots$
$y \in 3{,}33999\ldots$
$y \in 3{,}339999\ldots$
$y \in 3{,}3399999\ldots$
etc.

el punto *y* está también determinado por el decimal ilimitado

3,339999999999 ... 999 ...

Así tanto los binarios como los decimales limitados e ilimitados sirven para determinar los puntos de D_{01}

Todo decimal limitado determina uno y sólo un punto de D_{01}
Todo decimal ilimitado determina uno y sólo un punto de D_{01}
Todo punto de D_{01} *puede ser determinado por un decimal ilimitado por lo menos.*
Los puntos de D_{01} *que no pertenecen ni a la graduación, ni a las sub-graduaciones decimales sucesivas de* D_{01} *están determinados por uno y sólo un decimal ilimitado.*
Los puntos que pertenecen a la graduación de D_{01} *o a una de las sub-graduaciones decimales sucesivas están determinados por un número infinito de decimales limitados y por dos decimales ilimitados.*

Podemos pues extender la definición del parágrafo 5.

DEFINICIÓN

1. *Dos binarios* (limitados o ilimitados) *son iguales y definen el mismo* ***número real***

ssi

determinan el mismo punto de la recta D_{01}

2. *Un binario* (limitado o ilimitado) *y un decimal* (limitado o ilimitado) *son iguales y definen el mismo* ***número real***

ssi

determinan el mismo punto de la recta D_{01}

3. *Dos decimales* (limitados o ilimitados) *son iguales y definen el mismo* ***número real***

ssi

determinan el mismo punto de la recta D_{01}

EJERCICIOS

1. He aquí dos puntos distintos a y b de la recta D
Construye el punto medio m de $[a\ b]$
Marca 0 en a y 1 en b
¿Cuál es la abscisa de m en notación binaria; cuál, en notación decimal?

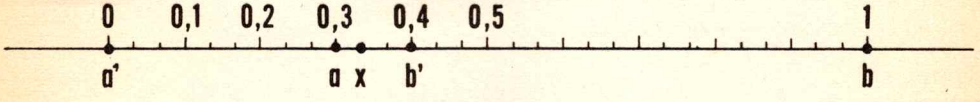
2. $0,1 = 0,10 = 0,100 = 0,1000 = \text{etc.}$
$= 0,1000000000 \ldots 00000 \ldots$
$= 0,0111111111111111 \ldots 11111111 \ldots$
$= 0,5 = 0,50 = 0,500 = 0,5000 = \text{etc.}$
$= 0,50000000000 \ldots 00000 \ldots$
$= 0,49999999999 \ldots 99999 \ldots$

3. He aquí dos puntos distintos a y b de la recta D

Marca 0 en a y 1 en b

Construye el punto x tal que $3\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{ab}$

Determina, en notación decimal, la abscisa de x

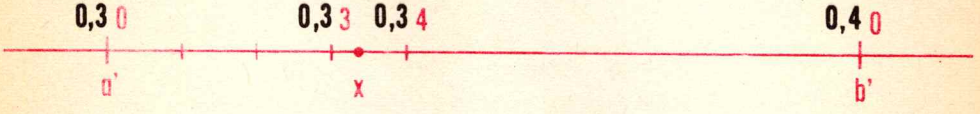


$3\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{ab}$

FIG. 123

Abscisa $x = 0,3$ etc.

Ampliación fotográfica



$3\overrightarrow{a'x} = \overrightarrow{a'b'}$

FIG. 124

Abscisa de $x = 0,3$ 333333 ... 333 ...

4. $0{,}0101010101 \ldots 0101 \ldots = 0{,}333333333 \ldots 333 \ldots$

5. He aquí dos puntos distintos a y b de la recta D

Marca 0 en a y 1 en b

Construye el punto x tal que $5\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{ab}$

¿Cuál es la abscisa de x en notación decimal?

6. $0{,}2 = 0{,}20 = 0{,}200 = 0{,}2000 = \text{etc.}$

$= 0{,}2000000000000 \ldots 00000 \ldots$

$= 0{,}199999999999 \ldots 99999 \ldots$

$= 0{,}0011001100110 \ldots 00110011 \ldots$

7. $\bar{7}{,}8 = \bar{7}{,}80 = \bar{7}{,}800 = \bar{7}{,}8000 = \text{etc.}$

$= \bar{7}{,}8000000000000 \ldots 00000 \ldots$

$= \bar{7}{,}799999999999 \ldots 99999 \ldots$

$= \overline{111}{,}1100110011001100 \ldots 11001100 \ldots$

8. $0 = \bar{1}{,}999999999 \ldots 99999 \ldots$

$= \bar{1}{,}1111111111111111 \ldots 11111111 \ldots$

9. $1 = 0{,}9999999999 \ldots 9999 \ldots$

$= 0{,}1111111111111111 \ldots 11111111 \ldots$

7

El grupo $R, +, \leqslant$

Hemos utilizado los números reales para determinar los puntos de una recta graduada.

El conjunto Z de enteros racionales es una parte de R y un grupo para la adición.

En la escuela primaria aprendiste a adicionar otros números que no son los enteros y, sobre todo, ciertas fracciones.

En este curso aprendimos a adicionar vectores y mostramos que toda recta orientada punteada se convierte naturalmente en un grupo conmutativo ordenado.

Ahora vamos a definir la adición de reales que prolonga la ya conocida adición de enteros racionales. Esta adición erigirá R en el grupo conmutativo ordenado $R, +, \leqslant$.

1 — ADICIÓN DE NÚMEROS REALES

Examinemos la adición de enteros racionales, que debemos prolongar.
He aquí una recta graduada D_{01} y $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$

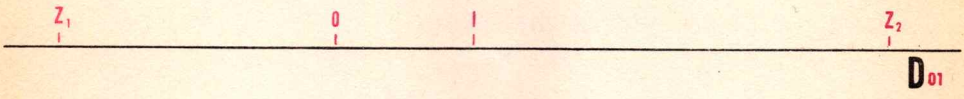


FIG. 125

Llamemos $\vec{e}$ al punto de abscisa 1

¿Cuáles son entonces los puntos de abscisas 0, z_1, z_2?

$\vec{o} = 0\,\vec{e}$ es el punto de abscisa 0

$z_1\,\vec{e}$ es el punto de abscisa z_1

$z_2\,\vec{e}$ es el punto de abscisa z_2

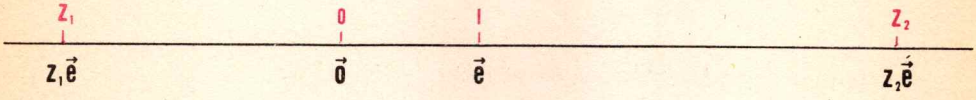


FIG. 126

— ¿Cuál es la abscisa de $z_1\vec{e} + z_2\vec{e}$?

— Sabemos que $z_1\vec{e} + z_2\vec{e} = (z_1 + z_2)\vec{e}$

Luego $z_1 + z_2$ es la abscisa de $z_1\vec{e} + z_2\vec{e}$

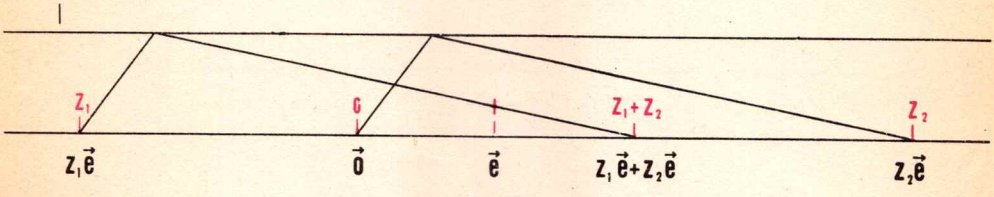


FIG. 127

— La adición de enteros racionales está enteramente caracterizada por la regla:

La suma $z_1 + z_2$ de los enteros racionales z_1, z_2
es la abscisa de la suma de los vectores de D_{01} de abscisas z_1, z_2

Definamos la adición de reales generalizando la regla anterior.

DEFINICIÓN DE LA ADICIÓN DE REALES

Si $a, b \in \mathbf{R}$

Entonces *se llama* **suma** *de* a *y* b *y se anota* $a + b$

a la abscisa de la suma de los vectores de D_{01} *de abscisas* a, b

La abscisa de la suma de vectores es igual a la suma de sus abscisas

Convengamos, hasta el fin de este capítulo
en anotar $\vec{r}$ el vector de D_{01} de abscisa $r \in \mathbf{R}$

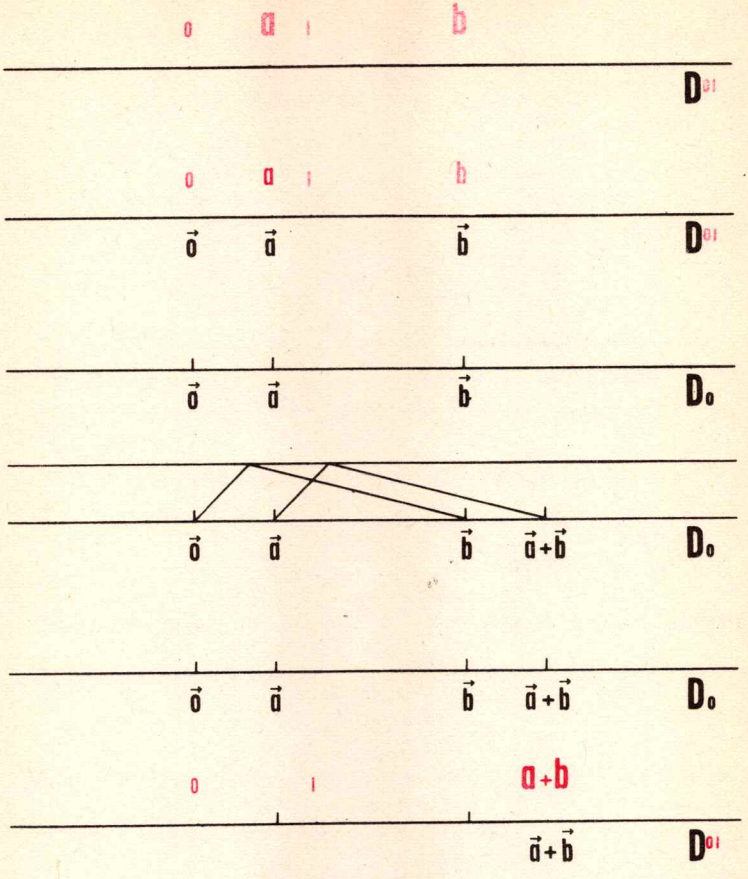
Esta convención da lugar inmediatamente

Para todo $r\ s \in \mathbf{R}$: $r = s \iff \vec{r} = \vec{s}$

y permite dos nuevas formulaciones de la definición de adición de números reales.

Si $a, b \in \mathbf{R}$ **Entonces** $a + b =$ abscisa de $\vec{a} + \vec{b}$

Para todo $a, b \in \mathbf{R}$: $\overrightarrow{a + b} = \vec{a} + \vec{b}$



LA ADICIÓN DE NÚMEROS REALES

FIG. 128

OBSERVACIÓN:

La definición de la adición de reales que acabamos de formular utiliza una recta graduada D_{01}

Mostraremos más adelante (§ 12) que la adición de reales es independiente de la elección de esta recta graduada.

2 — CONMUTATIVIDAD Y ASOCIATIVIDAD DE LA ADICIÓN DE REALES

Si $a, b \in \mathbf{R}$

Entonces
$$\overrightarrow{a + b} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \text{(definición de la adición de reales)}$$
$$= \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(conmutatividad de la adición de vectores)}$$
$$= \overrightarrow{b + a} \qquad \text{(definición de la adición de reales)}$$

Luego $\overrightarrow{a + b} = \overrightarrow{b + a}$ de donde $a + b = b + a$

Para todo $a, b \in \mathbf{R}$: $a + b = b + a$

La adición de reales es conmutativa

Si $a, b, c \in \mathbf{R}$,

Entonces
$$\overrightarrow{(a + b) + c} = \overrightarrow{a + b} + \vec{c} \qquad \text{(definición de la adición de reales)}$$
$$= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \qquad \text{(definición de la adición de reales)}$$
$$= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \text{(asociatividad de la adición de vectores)}$$
$$= \vec{a} + \overrightarrow{b + c} \qquad \text{(definición de la adición de reales)}$$
$$= \overrightarrow{a + (b + c)} \qquad \text{(definición de la adición de reales)}$$

Luego $\overrightarrow{(a + b) + c} = \overrightarrow{a + (b + c)}$ de donde $(a + b) + c = a + (b + c)$

Para todo $a, b, c \in \mathbf{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$

La adición de reales es asociativa

Convención:

Como para todo $a, b, c \in \mathbf{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$
podemos dispensarnos de colocar los paréntesis y poner

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

3 — EL NÚMERO CERO ES NEUTRO PARA LA ADICIÓN DE REALES

Si $r \in \mathbf{R}$

Entonces $\overrightarrow{r + 0} = \vec{r} + \vec{0}$ (definición de la adición de reales)

$= \vec{r}$ ($\vec{0}$ es neutro para la adición de vectores)

Luego $\overrightarrow{a + b} = \overrightarrow{b + a}$ de donde $a + b = b + a$

Teniendo en cuenta la conmutatividad de la adición:

Para todo $r \in \mathbf{R}$: $r + 0 = r = 0 + r$

El número 0 es neutro para la adición de reales

4 — SIMÉTRICO U OPUESTO CON RESPECTO A LA ADICIÓN

He aquí un entero racional z

$\vec{ze}$ es el punto de D_{01} de abscisa z

$(-z)\vec{e}$ es el punto de D_{01} de abscisa $-z$

Pero sabemos que $(-z)\vec{e} = -(\vec{ze})$

El simétrico del entero racional z está, pues, enteramente caracterizado por la regla:

El simétrico $-z$ del entero racional z
es la abscisa del simétrico del vector de D_{01} de abscisa z

Definimos el **simétrico** de todo número real r generalizando la regla anterior.

Si $r \in \mathbf{R}$

Entonces *se llama* **simétrico** *de r y se anota* $-r$
a la abscisa del simétrico del vector de D_{01} *de abscisa* r

Brevemente,

Si $r \in \mathbf{R}$
Entonces $-r =$ abscisa de $\vec{-r}$

Dicho de otro modo,

Para todo $r \in \mathbf{R}$: $\vec{-r} = -\vec{r}$

Si $r \in \mathbf{R}$

Entonces $\overrightarrow{(-r) + r} = \overrightarrow{-r} + \vec{r}$ (definición de la adición de reales)

$= -\vec{r} + \vec{r}$ (definición del simétrico de $\vec{r}$)

$= \vec{0}$ (propiedad del simétrico en el grupo de vectores)

Luego $\overrightarrow{(-r) + r} = \vec{0}$ de donde $(-r) + r = 0$

Teniendo en cuenta la conmutatividad de la adición de reales:

Para todo $r \in \mathbf{R}$: $-r \in \mathbf{R}$ y $(-r) + r = 0 = r + (-r)$

— ¿Quieres calcular $-(-r)$

— $\overrightarrow{-(-r)} = -\overrightarrow{(-r)} = -(-\vec{r}) = \vec{r}$

Luego $\overrightarrow{-(-r)} = \vec{r}$, de donde $-(-r) = r$

OBSERVACIÓN:

La definición dada más arriba del simétrico de un número real utiliza una recta graduada D_{01}

Mostraremos más adelante (§ 12, p. 138) que el simétrico de un real no depende de la elección de esta recta graduada.

5 — EL GRUPO R, +

Reunamos las propiedades de $\mathbf{R}, +$ que acabamos de establecer.

Para todo $a, b \in \mathbf{R}$:	$a + b = b + a \in \mathbf{R}$
Para todo $a, b, c \in \mathbf{R}$:	$(a + b) + c = a + (b + c)$
$0 \in \mathbf{R}$ y para todo $r \in \mathbf{R}$:	$r + 0 = r = 0 + r$
Para todo $r \in \mathbf{R}$: $-r \in \mathbf{R}$ y	$(-r) + r = 0 = r + (-r)$

Como ya lo sabes, el conjunto de estas propiedades se resume en la

PROPOSICIÓN 1

El conjunto de reales es un grupo conmutativo para la adición

Brevemente

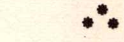
$\mathbf{R}, +$ ***es un grupo conmutativo***

6 — ASOCIATIVIDAD GENERAL

Ya hemos encontrado muchas leyes asociativas:

La unión, la intersección, la diferencia simétrica, la composición, la adición de vectores, la adición de reales, la multiplicación de enteros racionales, todas las leyes de grupo.

Resulta entonces interesante establecer, una vez por todas, una propiedad válida para todas las leyes asociativas.



He aquí un conjunto M que tiene una ley asociativa $*$

Se supone entonces simplemente que

$M, *$	
Para todo $a, b \in M$:	$a * b \in M$
Para todo $a, b, c \in M$:	$(a * b) * c = a * (b * c)$

La asociatividad de la ley $*$ permite escribir:

Para todo $a, b, c \in M$: $a * b * c = (a * b) * c = a * (b * c)$

Señalemos que toda sucesión de elementos a, b, c de M define uno y sólo un producto $a * b * c$

La sucesión de elementos a, b, c, d de M define los productos

$(a * b * c) * d$ $\qquad$ $(a * b) * (c * d)$ $\qquad$ $a * (b * c * d)$

Probemos que estos productos son iguales

1° $(a * b * c) * d$
$= (a * (\ \ )) * d$
$= a * ((\ \ ) * d)$
$= a * (\ \ \ \ \ )$

2° $(a * b) * (c * d)$
$= (a * b) * (\ \ \ \ )$
$= a * (b * (\ \ \ \ ))$
$= a * (\ \ \ \ \ )$ l.q.q.d.

Hemos establecido entonces que toda sucesión (a, b, c, d) de elementos de M define uno y sólo un producto que se anota $a * b * c * d$

Como toda sucesión de uno, dos, tres o cuatro elementos pertenecientes a M define uno y sólo un producto, la sucesión de cinco elementos $a, b, c, d, e \in M$ define los productos

$(a * b * c * d) * (e)$ $\qquad$ $(a * b) * (c * d * e)$

$(a * b * c) * (d * e)$ $\qquad$ $a * (b * c * d * e)$

Probemos que todos estos productos son iguales (al último)

$$
\begin{aligned}
&(\quad) * (\ ) \\
&= (a * (\ )) * (\ ) \\
&= a * ((\ ) * (\ )) \\
&= a * (\qquad)
\end{aligned}
$$

l.q.q.d.

Hemos establecido entonces que toda sucesión (a, b, c, d, e) de elementos de M define uno y sólo un producto que se anota $a * b * c * d * e$.

Observarás fácilmente que este procedimiento de demostración puede prolongarse.

Toda sucesión de seis, siete, ... términos de M define uno y sólo un producto.

TEOREMA (asociatividad general)

Si la ley $*$ de M, $*$ es asociativa y $n \in \omega_0$

Entonces toda sucesión $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos de M define uno y sólo un producto que se anota $a_1 * \ldots * a_n$

APLICACIONES:

1. La ley de $\mathbf{R}$, $+$ es asociativa.

   Luego, toda sucesión finita $(a_1, \ldots, a_n)$ de números reales define una y sólo una suma $a_1 + \ldots + a_n$

2. Para todo conjunto E, la ley de $\mathcal{P}E$, $\cap$ es asociativa.

   Luego, toda sucesión finita $(A_1 \ldots, A_n)$ de partes de E define una y sólo una intersección $A_1 \cap \ldots \cap A_n$

   La intersección $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ es el conjunto de objetos que pertenecen a todos los A_i

   Dicho de otro modo, $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ es el conjunto de x tales que la fórmula $x \in A_i$ es verdadera para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

3. La ley de Z, es asociativa.

   Luego, toda sucesión finita $(z_1, \ldots, z_n)$ de enteros racionales define uno y sólo un producto $z_1 \cdot \ldots \cdot z_n$

4. He aquí un conjunto E y $\mathcal{R}E$ el conjunto de relaciones definidas en E. La ley de $\mathcal{R}E$, es asociativa.

   Luego, toda sucesión finita $(R_1, \ldots, R_n)$ de relaciones en E define una y sólo una compuesta $R_1 \circ \ldots \circ R_n$

5. ¿Quieres enunciar propiedades análogas para $\mathcal{P}E$, $\cup$

   La reunión $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ es el conjunto de x tales que la fórmula $x \in A_i$ es verdadera para por lo menos uno de los $i \in \{1, \ldots, n\}$

6. Hemos visto que la diferencia simétrica es asociativa.

   Toda sucesión finita de conjuntos $(A_1, \ldots, A_n)$ define pues una y solo una diferencia simétrica $A_1 \Delta \ldots \Delta A_n$

   La diferencia simétrica $A_1 \Delta \ldots \Delta A_n$ es el conjunto de x tales que la fórmula $x \in A_i$ es verdadera para un número impar de valores $i \in \{1, \ldots, n\}$

7 — LA SUSTRACCIÓN DE REALES

La sustracción en **Z** ha sido definida por

$$\text{Para todo } z_1, z_2 \in \mathbf{Z} : \quad z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Definimos la sustracción en **R** generalizando la regla anterior.

Definición de la sustracción de reales

$$\text{Para todo } a, b \in \mathbf{R} : \quad a - b = a + (-b)$$

El número $a - b$ se llama la ***diferencia*** *de los números a y b*

EJERCICIOS

1. $1 - 0 = 1 \neq -1 = 0 - 1$
2. $1 - 0 \neq 0 - 1$
3. La sustracción de reales no es conmutativa.
4. $0 - (0 - 1) = 0 - (-1) = 0 + 1 = 1$
   $(0 - 0) - 1 = 0 - 1 = -1$
5. $0 - (0 - 1) \neq (0 - 0) - 1$
6. La sustracción de reales no es asociativa.
7. $\mathbf{R}, -$ no es un grupo.
8. $\mathbf{Z}, -$ no es un grupo.

Si $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbf{R}$

Entonces se simplifica la escritura poniendo

$$a - b + c + d - e - f + g - h$$
$$= a + (-b) + c + d + (-e) + (-f) + g + (-h)$$

En particular, la suma de los simétricos de la sucesión de reales

$a, b, \ldots, h, k$ se anotará $-a - b \ldots - h - k$

PROPOSICIÓN 2

El opuesto (o simétrico) de la suma de una sucesión de reales es igual a la suma de la sucesión de los opuestos.

Dicho de otro modo,

Si $a, b, \ldots, h, k \in \mathbf{R}$

Entonces $-(a + b + \ldots + h + k) = -a - b - \ldots - h - k$

DEMOSTRACIÓN:

$$(a + b + \ldots + h + k) + (-a - b - \ldots - h - k)$$
$$= a + b + \ldots + h + k + (-a) + (-b) + \ldots + (-h) + (-k)$$
$$= a + (-a) + b + (-b) + \ldots + k + (-k)$$
$$= 0 + 0 + \ldots + 0$$
$$= 0$$

8 — LOS GRUPOS R, + y D_0, + SON ISOMORFOS

He aquí una recta graduada D_{01}

Sabemos que D_{01}, + y **R**, + son grupos conmutativos.

Para todo real r, designaremos con $\vec{r}$ al vector de D_{01} de abscisa r

La aplicación $\mathbf{R} \to D_0 \quad : \quad r \to \vec{r}$
así definida por la graduación de D_{01}

es una **biyección que respeta la adición**, puesto que

Para todo $r, s \in \mathbf{R}$: $\overrightarrow{r + s} = \vec{r} + \vec{s}$

Como ya lo sabes (C. 3, § 2, p. 47) esto se expresa diciendo que

la biyección $\mathbf{R} \to D_0 \quad : \quad r \to \vec{r}$ **(definida por** D_{01}**)**
es un isomorfismo del grupo R, + sobre el grupo D_0, +

PROPOSICIÓN 3 — *La biyección* $\mathbf{R} \to D_0 \quad : \quad r \to \vec{r}$ *definida por* D_{01}
es un ***isomorfismo*** $\mathbf{R}, + \quad \to \quad D_0, +$

9 — EL GRUPO ORDENADO R, $+, \leqslant$

Sabemos que:

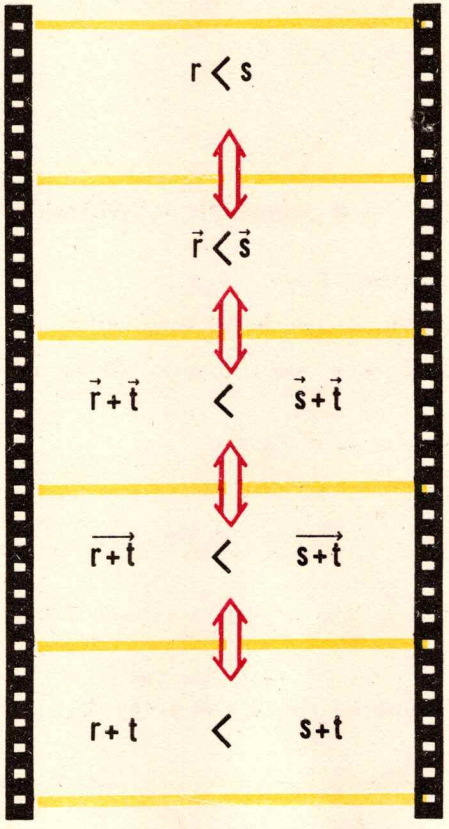
a) **R**, $+$ es un grupo conmutativo (C. 7, § 5, prop. 1, p. 122)

b) La relación $\leqslant$ es un orden total sobre **R** (C. 6, § 6, prop. 1, p. 105)

Probemos que

c) Para todo $r, s, t \in \mathbf{R}$: $r < s \iff r + t < s + t$

DEMOSTRACIÓN:



La biyección $\mathbf{R} \to D_{01} : x \to \vec{x}$ es *creciente* (C. 6, § 6, def. p. 105)

(C. 2, § 7, t., p. 28)

$D_0, +, \leqslant$ es un *grupo ordenado*

Definición de la adición de reales (C. 7, § 1, p. 118)

(C. 6, § 6, def., p. 105)

l.q.q.d.

FIG. 129

9. EL GRUPO ORDENADO $\mathbf{R}, +, \leqslant$

Como ya sabes, el conjunto de proposiciones a, b, c se resume en la

PROPOSICIÓN 4

$\mathbf{R}, +, \leqslant$ *es un grupo conmutativo ordenado*

En el grupo ordenado $\mathbf{R}, +, \leqslant$ los razonamientos del capítulo 2, § 9, son íntegramente aplicables. Ello nos permite enunciar la

PROPOSICIÓN 5

Si $a, b, c, d \in \mathbf{R}$

Entonces

1°	$a < b$	y	$c < d$	$\Longrightarrow$	$a + c < b + d$
2°	$a \leqslant b$	y	$c \leqslant d$	$\Longrightarrow$	$a + c \leqslant b + d$
3°	$a < b$	y	$c \leqslant d$	$\Longrightarrow$	$a + c < b + d$
4°	$a \leqslant b$	y	$c < d$	$\Longrightarrow$	$a + c < b + d$
5°			$a < b$	$\Longleftrightarrow$	$-b < -a$
6°			$a \leqslant b$	$\Longleftrightarrow$	$-b \leqslant -a$
7°			$a < b < c$	$\Longleftrightarrow$	$-c < -b < -a$
8°			$a \leqslant b < c$	$\Longleftrightarrow$	$-c < -b \leqslant -a$
9°			$0 < a$	$\Longleftrightarrow$	$-a < 0$
10°		$a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$		$\Longrightarrow$	$0 \leqslant c - b \leqslant d - a$

DEMOSTRACIÓN:

Para las fórmulas 1 a 6, ver C. 2, § 9, prop, 3 y 4, pp. 30, 32.

A título de ejercicio, deducirás las fórmulas 7 a 9 de las fórmulas 5 y 6.

Falta probar la fórmula 10.

Se nos informa que $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$

De donde $-b \leqslant -b \leqslant -a$

y por adición $0 \leqslant c - b \leqslant d - a$ l.q.q.d.

10 — ADICIÓN DE BINARIOS Y DE DECIMALES LIMITADOS

He aquí los binarios limitados $a = 0{,}111$
$b = 1{,}1$

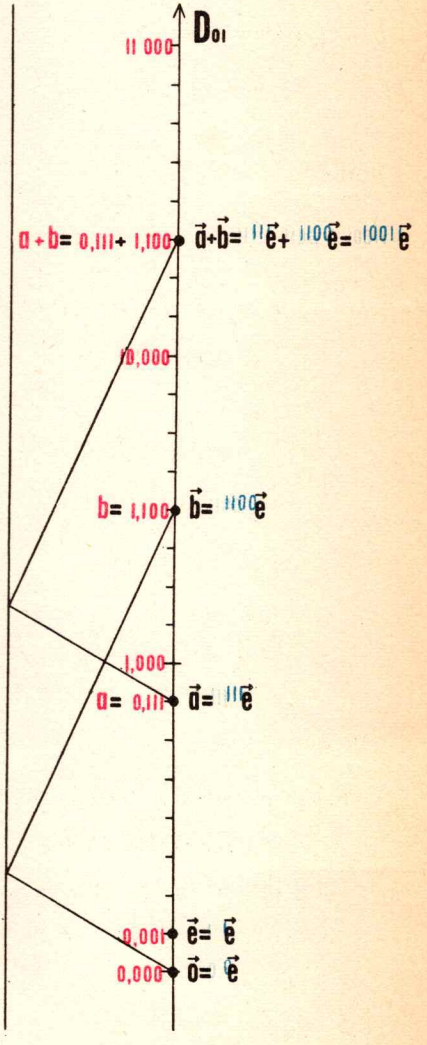
Nos proponemos calcular $a + b = 0{,}111 + 1{,}1$

Para la facilidad del dibujo, hemos elegido números bastante pequeños. Te darás cuenta fácilmente de que el razonamiento es general.

Representemos a y b mediante binarios que tienen el mismo número de cifras después de la coma: $a = 0{,}111$
$b = 1{,}100$

Para calcular $a + b$ recurrimos a la recta graduada D_{01} que nos sirvió para definir la adición de reales.

¡ATENCIÓN!
En la figura, observa primero la parte situada a la izquierda de la recta D_{01}



... luego
$0{,}111 + 1{,}100 = 10011$

FIG. 130

A título de ejercicio, repite el razonamiento anterior para la adición de dos decimales limitados, por ejemplo 1,3 y 2,8.

Hemos establecido la

PROPOSICIÓN 6 — *Para calcular la suma de dos binarios o decimales que tienen n cifras después de la coma, es suficiente proceder de la siguiente manera:*

a) suprimir la coma en los binarios o decimales dados

b) adicionar los enteros racionales así obtenidos

c) ubicar la coma en la suma de modo de hacer aparecer n cifras después de la coma.

Acabamos de obtener un resultado importante

La adición de números binarios limitados (que son números reales particulares) ha sido **definida** con la ayuda de una recta graduada D_{01}
Sin embargo, la adición de números binarios limitados no depende de la elección de esta recta graduada.
La suma de una cupla de números binarios limitados se calcula directamente a partir de los binarios limitados que representan estos números.

OBSERVACIÓN:

En lo antes expuesto elegimos dos números reales positivos.
El razonamiento y los resultados continúan siendo válidos si uno por lo menos de los dos números es negativo, con la condición de escribir todo real negativo bajo la forma $-r$ con $r \in \mathbf{R}^+$

A título de ejercicio, repite el razonamiento de la figura 130 en las situaciones

1° $\begin{cases} a = -10{,}101 \\ b = 0{,}11 \end{cases}$ 2° $\begin{cases} a = -1{,}101 \\ b = 11{,}01 \end{cases}$ 3° $\begin{cases} a = -0{,}111 \\ b = -1{,}1 \end{cases}$

4° $\begin{cases} a = -1{,}8 \\ b = 0{,}9 \end{cases}$ 5° $\begin{cases} a = -1{,}2 \\ b = 2{,}7 \end{cases}$ 6° $\begin{cases} a = -0{,}7 \\ b = -1{,}4 \end{cases}$

Observemos que, en virtud de la proposición 6

$$\begin{aligned} 527{,}24306 &= 500 \\ &+ 20 \\ &+ 7 \\ &+ 0{,}2 \\ &+ 0{,}04 \\ &+ 0{,}003 \\ &+ 0{,}0000 \\ &+ 0{,}00006 \end{aligned}$$

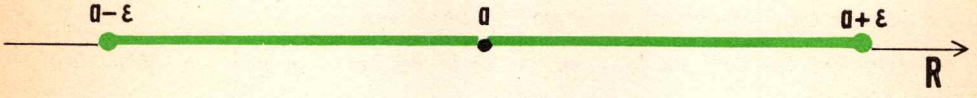
$$\begin{aligned} -21{,}539 &= -20 \\ &- 1 \\ &- 0{,}5 \\ &- 0{,}03 \\ &- 0{,}009 \end{aligned}$$

11 — VALORES APROXIMADOS

DEFINICIONES — Para todo $a, r \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$:

a es valor aproximado de r con error menor o igual que ε

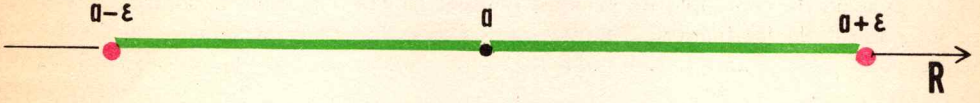
ssi



$$r \in [a - \varepsilon \ ; \ a + \varepsilon]$$

a es valor aproximado de r con error menor que ε

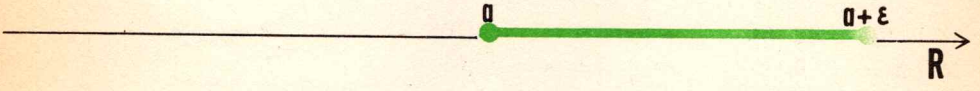
ssi



$$r \in]a - \varepsilon \ ; \ a + \varepsilon[$$

a es valor aproximado de r por defecto con error menor o igual que ε

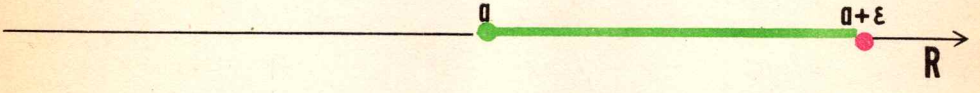
ssi



$$r \in [a \ ; \ a + \varepsilon]$$

a es valor aproximado de r por defecto con error menor que ε

ssi



$$r \in [a \ ; \ a + \varepsilon[$$

FIG. 131

¿Quieres traducir estas definiciones a fórmulas?

Si $a, r \in \mathbf{R}$ **y** $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces

a es valor aproximado de r, con error menor o igual que ε	**a es valor aproximado de r con error menor que ε**
ssi	**ssi**
$a - \varepsilon \leqslant r \leqslant a + \varepsilon$	$a - \varepsilon < r < a + \varepsilon$
a es valor aproximado de r por defecto con error menor o igual que ε	**a es valor aproximado de r por defecto con error menor que ε**
ssi	**ssi**
$a \leqslant r \leqslant a + \varepsilon$	$a \leqslant r < a + \varepsilon$

EJERCICIOS

1. Si $r =$ 11011,0110111 etc.

Entonces 11011 es valor aproximado de r
por defecto con error menor o igual que 1.
11011,0 es valor aproximado de r
por defecto con error menor o igual que 0,1.
11011,01 es valor aproximado de r
por defecto con error menor o igual que 0,01.

...

$a =$ 11011,0110111 es valor aproximado de r
por defecto con error menor o igual que 0,0000001

No puedes afirmar que a es valor aproximado de r por defecto con error menor que 0,000001. ¿Por qué?

Pero en cambio puedes afirmar que a es valor aproximado de r por defecto con error menor que 0,0000001

2. Ya has encontrado el número $\pi = 3{,}14159$ etc.

El número 3,14 es valor aproximado de π
por defecto con error menor que 0,01.

El número 3,1416 es valor aproximado de π
con error menor que 0,0001.

3. **Si** $r, a \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

   Entonces a es valor aproximado de r con error menor que ε

   ssi

   r es valor aproximado de a con error menor que ε

4. **Si** $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

   Entonces la relación

   ... es valor aproximado, con error menor o igual que ε, de ..
   definida en **R**
   es reflexiva, simétrica y no transitiva.

5. 2,55 es valor aproximado de 2,6 con error menor o igual que 0,1
   2,6 es valor aproximado de 2,68 con error menor o igual que 0,1
   2,55 no es valor aproximado de 2,68 con error menor que 0,1

6. **Si** $r \in \mathbf{R}$

   Entonces 10110l,0111 es valor aproximado de r por defecto con error menor o igual que 0,0001

   ssi

   $r =$ 10110l,0111 etc.

PROPOSICIÓN 7

Si 0 *es valor aproximado de r por defecto*
con error menor o igual que 0,1
con error menor o igual que 0,01
...
con error menor o igual que 0,00 ... 01
... etc

Entonces $r = 0$

DEMOSTRACIÓN:

Se nos indica que $0 \leqslant r \leqslant 0{,}1$
$0 \leqslant r \leqslant 0{,}01$
... etc

En consecuencia **si** $\vec{r}$ designa el punto de D_{01} de abscisa r
entonces $\vec{r}$ pertenece a una sucesión infinita de segmentos binarios encajados que tienen en común el único punto $\vec{0}$

Luego (¡Axioma de continuidad!) $\vec{r} = \vec{0}$ y $r = 0$

l.q.q.d.

PROPOSICIÓN 8 — *He aquí los reales x, y*

Si

s_1 *es valor aproximado de x y de y por defecto con error menor o igual que 0,1*

s_2 *es valor aproximado de x y de y por defecto con error menor o igual que 0,01*

s_3 *es valor aproximado de x y de y por defecto con error menor o igual que 0,001*

. . .

s_n *es valor aproximado de x y de y por defecto con error menor o igual que*

$$0{,}\underbrace{0\ \ldots\ 01}_{n\ \text{cifras}}$$

. . . etc.

Entonces $x = y$

DEMOSTRACIÓN:

La generalidad no queda restringida si se supone $x \leqslant y$
En consecuencia

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \leqslant x \leqslant y \leqslant s_1 + 0{,}1 \\ s_2 \leqslant x \leqslant y \leqslant s_2 + 0{,}01 \\ s_3 \leqslant x \leqslant y \leqslant s_3 + 0{,}001 \\ \ldots \text{ etc.} \end{array}\right. \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leqslant y - x \leqslant 0{,}1 \\ 0 \leqslant y - x \leqslant 0{,}01 \\ 0 \leqslant y - x \leqslant 0{,}001 \\ \ldots \text{ etc.} \end{array}\right. \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{prop. 7} \end{array}\right. \Longrightarrow y - x = 0$$

prop. 5, nº 10

l.q.q.d.

formulemos nuevamente la proposición anterior.

PROPOSICIÓN 8

Si

s_1 *es valor aproximado del real r* por defecto con error menor o igual que 0,1

s_2 *es valor aproximado del real r* por defecto con error menor o igual que 0,01

s_3 *es valor aproximado del real r* por defecto con error menor o igual que 0,001

. . .

s_n *es valor aproximado del real r* por defecto con error menor o igual que

$$0{,}\underbrace{0\ \ldots\ 01}_{n\ \text{cifras}}$$

. . . etc.

Entonces

r es el único número que satisface estas condiciones y r está determinado por la sucesión infinita $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ etc.

12 – CÁLCULO APROXIMADO EN R, +, ≤

Cómo adicionar los números reales $a = 11{,}101011100001010$ etc.
$b = 101{,}110010101101110$ etc.

● Qué deducir de la información $a = 11{,}10$ etc.
$b = 101{,}11$ etc.

$$\begin{array}{l} 11{,}10 \leqslant a \leqslant 11{,}10 + 0{,}01 \\ 101{,}11 \leqslant b \leqslant 101{,}11 + 0{,}01 \end{array}$$

R, +, ≤ ⇓ es un grupo ordenado

$$11{,}10 + 101{,}11 \leqslant a + b \leqslant (11{,}10 + 101{,}11) + 0{,}1$$

regla de adición ⇓ de los binarios limitados

$$1001{,}01 \leqslant a + b \leqslant 1001{,}01 + 0{,}1$$

Así $1001{,}01 = 11{,}10 + 101{,}11$ es valor aproximado de $a + b$ por defecto con error menor o igual que 0,1

● Qué deducir de la información $a = 11{,}101$ etc.
$b = 101{,}110$ etc.

$$\begin{array}{l} 11{,}101 \leqslant a \leqslant 11{,}101 + 0{,}001 \\ 101{,}110 \leqslant b \leqslant 101{,}110 + 0{,}001 \end{array}$$

⇓

$$11{,}101 + 101{,}110 \leqslant a + b \leqslant (11{,}101 + 101{,}110) + 0{,}01$$

⇓

$$1001{,}011 \leqslant a + b \leqslant 1001{,}011 + 0{,}01$$

Así $1001{,}011 = 11{,}101 + 101{,}110$ es valor aproximado de $a + b$ por defecto con error menor o igual que 0,01

● ... etc.

Si $a = 11{,}10101110000$ etc. y $b = 101{,}11001010110$ etc.

Entonces

ε	Valor aproximado de $a + b$ por defecto con error menor o igual que ε			
0,1	11,10	+ 101,11	= 1001,01	$= s_1$
0,01	11,101	+ 101,110	= 1001,011	$= s_2$
0,001	11,1010	+ 101,1100	= 1001,0110	$= s_3$
0,0001	11,10101	+ 101,11001	= 1001,01110	$= s_4$
0,00001	11,101011	+ 101,110010	= 1001,011101	$= s_5$
0,000001	11,1010111	+ 101,1100101	= 1001,0111100	$= s_6$
0,0000001	11,10101110	+ 101,11001010	= 1001,01111000	$= s_7$
0,00000001	11,101011100	+ 101,110010101	= 1001,011110001	$= s_8$
0,000000001	11,1010111000	+ 101,1100101011	= 1001,0111100011	$= s_9$
0,0000000001	11,10101110000	+ 101,11001010110	= 1001,01111000110	$= s_{10}$

Los binarios limitados $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ son valores aproximados de $a + b$ por defecto con error menor o igual que

$$0{,}1\,; \quad 0{,}01\,; \quad \ldots\,; \quad \underbrace{0{,}0\ldots01}_{n \text{ cifras}}\,; \quad \ldots$$

En virtud de la proposición 8, el número real $a + b$ está determinado por la sucesión infinita $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$.

Esta sucesión permite escribir progresivamente un binario ilimitado que representa $a + b$

$$\begin{aligned} a + b &= 1001{,}011 \text{ etc.} \\ &= 1001{,}0111 \text{ etc.} \\ &= 1001{,}011110 \text{ etc.} \\ &= 1001{,}0111100 \text{ etc.} \\ &= 1001{,}01111000011 \text{ etc.} \\ &\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

A título de ejercicio examinemos un caso particular importante.

Si $a = 243{,}1725$

$b = 0{,}00008971456$ etc.

Entonces $a + b = 243{,}17258971456$ etc.

donde los dos etc. representan la misma sucesión de cifras.

DEMOSTRACIÓN:

$$0{,}00008971456 \leqslant b \leqslant 0{,}00008971457$$

$$a + 0{,}00008971456 \leqslant a + b \leqslant a + 0{,}00008971457$$

$$243{,}1725 + 0{,}00008971456 \leqslant a + b \leqslant 243{,}1725 + 0{,}00008971457$$

$$243{,}17258971456 \leqslant a + b \leqslant 243{,}17258971457$$

Luego $a + b = 243{,}17258971456$ etc.

l.q.q.d.

* * *

En el parágrafo 1 de este capítulo definimos la adición de reales utilizando una recta graduada D_{01}

Acabamos de calcular la suma de una cupla de reales representados por binarios ilimitados utilizando exclusivamente estos binarios ilimitados.

La adición de reales no depende, pues, de la elección de la recta D_{01} que habíamos utilizado para definir esta adición.

TEOREMA 1 — **El grupo conmutativo ordenado R, +, ⩽ está totalmente definido por R.**

Toda recta graduada A_{01} **define un isomorfismo creciente**

$$A_{01} \to \mathbf{R} : \vec{a} \to \text{abscisa de } \vec{a}$$

En particular, la abscisa de una suma es igual a la suma de las abscisas y para todo $\vec{x}, \vec{y} \in A_{01}$:

$$\vec{x} \leqslant \vec{y} \iff \text{abscisa de } \vec{x} \leqslant \text{abscisa de } \vec{y}$$

* * *

El grupo **R**, + está totalmente definido por **R**

En todo grupo, todo elemento admite uno y sólo un simétrico (MM1, C, 24, § 5, p. 453).

Luego el simétrico $-r$ de $r \in \mathbf{R}$ no depende de la recta que se utilizó para definirlo.

Así, la sustracción en **R** también está definida por **R**.

EJERCICIOS

1. ¿Quieres resolver las ecuaciones (en Z)?

$$\begin{aligned} x + 15 &= -117 \\ x - 49 &= 278 \\ -x + 14 &= -83 \\ 4x - 13 &= 5x + 17 \\ -7x + 8 &= -8x - 41 \end{aligned}$$

2. Esta amable persona no quiere revelarnos su edad. Pero admite que cinco veces su edad es igual a seis veces la edad que ella tenía hace ocho años.
¿Ha guardado bien su secreto?

3.

0,1	+ 0,1	=
0,01	+ 0,11	=
0,101101	+ 0,0100011	=
0,1100011	+ ...	= 1
1	− 0,011	=
1	− 0,10110001	=

4.

0,7	+ 0,3	=
0,69	+ 0,31	=
0,025	+ 0,975	=
0,40267	+ 0,59733	=
0,0908812	+ 0,9091188	=
0,2073425	+ ...	= 1
0,710345692	+ ...	= 1
1	− 0,78054	=
1	− 0,0074900	=

5. **Si** $a, b \in \mathbf{R}$

Entonces $\begin{aligned}(a + b) + (-a - b) &= a + b - a - b \\ &= a + b - b - a \\ &= a + 0 - a \\ &= a - a \\ &= 0\end{aligned}$

6. **Si** $a, b, c \in \mathbf{R}$

Entonces
$$\begin{aligned} -(a + b) &= -a - b \\ -(a - b) &= -a + b \\ -(-a - b) &= a + b \\ -(a - b - c) &= -a + b + c \\ -(-a + b - c) &= a - b + c \end{aligned}$$

7. Si $\quad r \in \mathbf{R}$

Entonces $-1 + r = -(1 - r)$

8. $-1 + 0{,}1 = -(1 - 0{,}1) = -0{,}1$
$-1 + 0{,}101 = \quad = -0{,}011$
$-1 + 0{,}01101 =$
$-1 + 0{,}10111010 =$

9. $-1 + 0{,}4 = -(1 - 0{,}4) = -0{,}6$
$-1 + 0{,}293 = \quad = -0{,}707$
$-1 + 0{,}04453 =$
$-1 + 0{,}9107460 =$

10. $101{,}1011 + 11{,}011 =$
$1011{,}011011 + 1{,}10100 + 11011{,}01110 =$
$-10{,}101 - 11{,}0111 =$
$-11{,}0111 + 10{,}101 =$
$111{,}01010 - 10{,}111 =$
$-111 - 0{,}01110 =$

11. $23{,}749 + 101{,}0065 =$
$481{,}29 + 72{,}397 + 10.467{,}7 =$
$-13{,}427 - 31{,}9025 =$
$-78{,}224 + 11{,}0455 =$
$104{,}0025 - 98{,}7777 =$
$-78 - 0{,}49708 =$

12. $\overline{101}{,}1001 = -101 + 0{,}1001$
$= -100 - 1 + 0{,}1001$
$= -100 - (1 - 0{,}1001)$
$= -100 - 0{,}0111$
$= -100{,}0111$

13. $\overline{11011}{,}0111010 = -11010{,}1000110$
$\overline{1}{,}1100011 = - \quad 0{,}0011101$

14. $\overline{78}{,}2347 = -78 + 0{,}2347$
$= -77 - 1 + 0{,}2347$
$= -77 - (1 - 0{,}2347)$
$= -77 - 0{,}7653$
$= -77{,}7653$

15. $\overline{1234},43210 = -1233,56790$

$\bar{1},280045 = -0,719955$

16. $-11,011 = -11 - 0,011$

$= -100 + 1 - 0,011$

$= \overline{100} + (1 - 0,011)$

$= \overline{100} + 0,101$

$= \overline{100},101$

17. $-1011,101001 = \overline{1100},010111$

$-11000,01101101 =$

18. $-3,72 = -3 - 0,72$

$= -4 + 1 - 0,72$

$= -4 + 0,28$

$= \bar{4},28$

19. $-21,783 = \overline{22},217$

$-6,27930546 =$

20. $\bar{1}1,101 + 10,0111 = -10,011 + 10,0111 =$

$110,1010 + \overline{1110},011 =$

$\overline{101},0111 + \bar{1}0,101 =$

$\bar{1}1,01101 + 111,01 + \bar{1},011 =$

21. $\overline{17},245 + 39,26 = -16,755 + 39,26 =$

$104,68 + \overline{72},28 =$

$\overline{49},005 + \bar{2},4761 =$

$\overline{13},296 + \bar{5},9416 =$

22. Si para todo $n \in \omega$

B_n designa el conjunto de binarios limitados que comprenden a lo sumo n cifras después de la coma

Entonces $Z = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \ldots$

y $B_n, +, \leqslant$ es un grupo conmutativo ordenado.

23. Si B designa el conjunto de números binarios limitados,

Entonces $r \in B \iff r$ pertenece a por lo menos uno de los B_n

Esto se expresa diciendo que B es la reunión de

$$\{B_0, B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots\}$$

En símbolos

$$B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n \cup B_{n+1} \cup \ldots,$$

o, brevemente

$$B = \bigcup_{i \in \omega} B_i$$

24. $B, +, \leqslant$ es un grupo conmutativo ordenado.

25. El conjunto de números decimales limitados es un grupo conmutativo ordenado.

26. Ecuaciones en $\mathbf{R}$

$$x + 101{,}01 = 11{,}1$$
$$\overline{11}{,}0111 + x = 101{,}001$$
$$-1{,}11101 - x = 11{,}01$$
$$-x + 17{,}293 = 48{,}205$$
$$x - \overline{16}{,}45 = 2{,}395$$
$$x + \overline{15}{,}205 = \overline{5}{,}48$$

27. $\{x \in \mathbf{R} \mid x - 110{,}011 = 10{,}1\} = \{1000{,}111\}$

$\{x \in \mathbf{R} \mid -x + 17{,}2945 = -3{,}05\} = \{20{,}3445\}$.

28. Si $x \in \mathbf{R}$

Entonces

$$3{,}5 \leqslant x + 7{,}2 < 5{,}3$$

ssi

$$3{,}5 - 7{,}2 \leqslant x < 5{,}3 - 7{,}2$$

ssi

$$x \in [-3{,}7 \ ; \ -1{,}9[$$

29. Procede de la misma manera en las situaciones siguientes:

a) $-17{,}3 < x - 4{,}9 < 5{,}47$

b) $1{,}01 < -x + 11{,}1 \leqslant -0{,}111$

c) $-4{,}95 \leqslant -3{,}4 - x \leqslant 7{,}925$

30. **Si** $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces ¿cuál es el conjunto de $x \in \mathbf{R}$ tales que

$$x - \varepsilon \leqslant x \leqslant x + \varepsilon$$

31. **Si** $a \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces ¿cuál es el conjunto de $x \in \mathbf{R}$ tales que

$$a + \varepsilon \leqslant x \leqslant a - \varepsilon \ ?$$

32. **Si** $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$,

Entonces
$$\{a \in \mathbf{R} \mid a - \varepsilon < a < a + \varepsilon\} = \mathbf{R}$$
$$\{a \in \mathbf{R} \mid a - \varepsilon \leqslant a < a + \varepsilon\} = \mathbf{R}$$
$$\{a \in \mathbf{R} \mid a - \varepsilon < a \leqslant a + \varepsilon\} = \mathbf{R}$$

33. $\{x \in \mathbf{R} \mid x - 17{,}3 \geqslant 2{,}95 \text{ et } -x + 0{,}3 \geqslant -0{,}95\} = \phi$

$\{x \in \mathbf{R} \mid x + 5{,}2, \leqslant -2{,}75 \text{ et } -x + 0{,}45 \geqslant -17\}$

$$= \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant -7{,}95\}$$

$\{x \in \mathbf{R} \mid -x - 4{,}05 \leqslant -7{,}15 \text{ et } x - 7{,}43 < 2{,}75\} = [+3{,}1;\ 10{,}18[$

$\{x \in \mathbf{R} \mid -x + 0{,}275 \leqslant -13{,}51 \text{ et } -6{,}27 - x > 0{,}8\} =$

$\{x \in \mathbf{R} \mid 6 \leqslant -x + 0{,}35 \text{ et } -x - 0{,}756 > 5{,}394\} =$

34. **Si** $a, x \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces
$$a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$$
ssi
$$-a - \varepsilon \leqslant -x \leqslant -a + \varepsilon$$

35. **Si** $a, x \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces a es valor aproximado de x con error menor o igual que ε

ssi

$-a$ es valor aproximado de $-x$ con error menor o igual que ε

36. **Si** 3,3942 es valor aproximado de x con error menor o igual que 0,0001

Entonces calcula un valor aproximado de $-x$ con error menor o igual que 0,0001

37. **Si** $a, b, x, y \in \mathbf{R}; \varepsilon, \eta \in \mathbf{R}_0^+$ **Entonces**

$$\boxed{\begin{matrix} a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon \\ b-\eta \leqslant y \leqslant b+\eta \end{matrix}} \Longrightarrow \boxed{(a+b)-(\varepsilon+\eta) \leqslant x+y \leqslant (a+b)+(\varepsilon+\eta)}$$

38. **Si** $a, b, x, y \in \mathbf{R}; \varepsilon, \eta \in \mathbf{R}_0^+$

a es valor aproximado de x con error menor o igual que ε

b es valor aproximado de y con error menor o igual que η

Entonces $a + b$ es valor aproximado de $x + y$ con error menor o igual que $\varepsilon + \eta$

39. Se te indica que

2,389 es valor aproximado de a con error menor o igual que 0,001

3,517 es valor aproximado de b con error menor o igual que 0,001

$-3{,}647$ es valor aproximado de c con error menor o igual que 0,001

1º ¿Quieres calcular los valores aproximados de

$$x = a + b + c \qquad z = -a - b - c$$
$$y = a - b - c \qquad t = a - b + c$$

con error menor o igual que 0,003

2º A partir de la información dada, no es posible calcular x, y, z, t con error menor o igual que 0,001

3º 2,25 no es valor aproximado de x con error menor o igual que 0,01

2,26 es valor aproximado de x con error menor o igual que 0,01

2,2 y 2,3 son valores aproximados de x con error menor o igual que 0,1

2,2 es valor aproximado de x por defecto con error menor o igual que 0,1

4º 2,52 es valor aproximado de y con error menor o igual que 0,01

2,5 es valor aproximado de y por defecto con error menor o igual que 0,1

5º $-2{,}26$ es valor aproximado de z con error menor o igual que 0,01

$-2{,}2$ y $-2{,}3$ son valores aproximados de z con error menor o igual que 0,1

$-2{,}3$ es valor aproximado de z por defecto con error menor o igual que 0,1

6º Realiza observaciones análogas con respecto a t

40. **Si** $a, x \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces

$$a \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$$

ssi

$$-a - \varepsilon \leqslant -x \leqslant -a$$

ssi

$$-a - \varepsilon \leqslant -x \leqslant (-a - \varepsilon) + \varepsilon$$

41. **Si** $a, x \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces a es valor aproximado de x por defecto con error menor o igual que ε

ssi

$-a-\varepsilon$ es valor aproximado de $-x$ por defecto con error menor o igual que ε

42. **Si** 3781,2857 es valor aproximado de x por defecto con error menor o o igual que 0,0001

Entonces $-3781{,}2857 - 0{,}0001 = -3781{,}2858 = \overline{3782},7142$ } es valor aproximado de $-x$ por defecto con error menor o igual que 0,0001

43. 3,14 es valor aproximado de π por defecto con error menor o igual que 0,01
Luego $\bar{4}$,85 es valor aproximado de $-\pi$ por defecto con error menor o igual que 0,01

44. 3,14159 es valor aproximado de π por defecto con error menor o igual que 0,00001
Luego $\bar{4}$,85840 es valor aproximado de $-\pi$ por defecto con error menor o igual que 0,00001

45. $x = 32{,}2539$ etc.

ssi

32,2539 es valor aproximado de x por defecto con error menor o igual que 0,0001

46. $y = \overline{45},783$ etc.

ssi

$\overline{45}$,783 es valor aproximado de y por defecto con error menor o igual que 0,001

47.

$x = 32{,}2539$ etc.	$\Longleftrightarrow$	$-x = \overline{33},7460$ etc.
$y = \overline{45},783$ etc.	$\Longleftrightarrow$	$-y = 44{,}216$ etc.
$\pi = 3{,}14$ etc.	$\Longleftrightarrow$	$-\pi = \bar{4},85$ etc.

48.

$-(32{,}2539$ etc.$) = \overline{33},7460$ etc.
$-(\overline{45},783$ etc.$) = 44{,}216$ etc.
$-(3{,}14159$ etc.$) = \bar{4},85840$ etc.
$-(719{,}40720$ etc.$) = \ldots$
$-(\bar{8},091745$ etc.$) = \ldots$

49. **Si** $a, b \in \mathbf{R}$
Entonces $a < b \Rightarrow a + a < b + b$

50. **Si** $a, b \in \mathbf{R}$
Entonces $a \neq b \Rightarrow a < b$ o $b < a$
$\Rightarrow a + a < b + b$ o $b + b < a + a$
$\Rightarrow a + a \neq b + b$

51. El ejercicio anterior implica:
Para todo $r \in \mathbf{R}$, existe *a lo sumo* un $x \in \mathbf{R}$ tal que $x + x = r$
Representa **R** por medio de una recta D_{01}
Si m determina el punto medio de $[0, r]$
Entonces $m + m = r$
De donde resulta:
Para todo $r \in \mathbf{R}$, existe uno y sólo un real que se anota $r/2$ tal que

$$r/2 + r/2 = r$$

52. **Si** $a, x \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$
Entonces a es valor aproximado de x por defecto con error menor o igual que ε **ssi**
$a + \varepsilon/2$ es valor aproximado de x con error menor o igual que $\varepsilon/2$

53. Calcula

$0{,}010101 \ldots 0101 \ldots + 0{,}101010 \ldots 1010 \ldots = 1$
$0{,}11001100 \ldots 1100 \ldots + 0{,}00000011\,0011 \ldots 0011 \ldots = 0{,}1101$

54. Calcula

$710{,}8566666 \ldots 6 \ldots + 287{,}5187333 \ldots 3 \ldots =$
$27{,}85488888 \ldots 8 \ldots - 53{,}212755555 \ldots 5 \ldots =$

55. ¿Quieres dar un valor aproximado de la solución de la ecuación

$$x + a = b$$

sabiendo que $a = 101{,}1011$ etc.
$b = 10{,}1100$ etc.

Respuesta: $x = \overline{11}{,}000$ etc.

13 — VALOR ABSOLUTO EN R

— ¿Recuerdas la definición del valor absoluto de los enteros racionales?

— **Si** $0 \leqslant z \in \mathbf{Z}$ **Entonces** $|z| = z$

Si $0 \geqslant z \in \mathbf{Z}$ **Entonces** $|z| = -z$

— ¿Quieres extender esta definición a **R**?

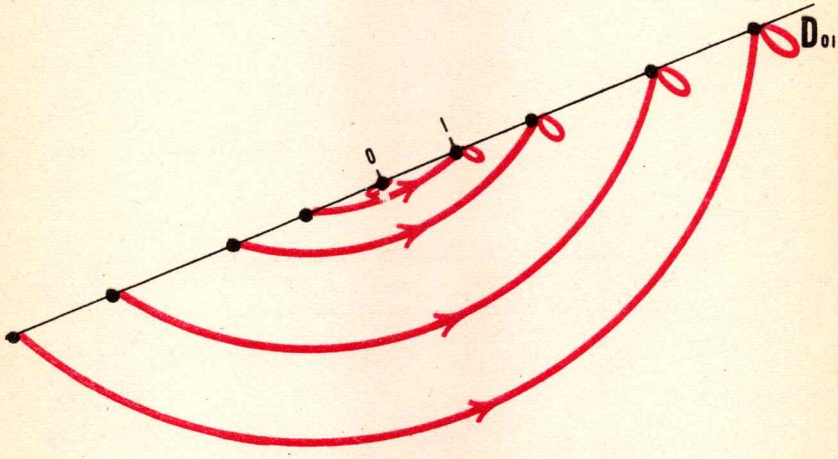
DEFINICIÓN — He aquí un real r

Si $r \geqslant 0$, **Entonces** $|r| = r$

Si $r \leqslant 0$, **Entonces** $|r| = -r$

El número positivo r se llama **valor absoluto de** r

LA RECTA GRADUADA $\mathbf{D_{01}}$ REPRESENTA A **R**



$\mathbf{R} \to \mathbf{R} : r \to |r|$

FIG. 132

Inmediatamente:

Para todo $r \in \mathbf{R}$: $|r| = |-r| \geqslant 0$

$|r| = 0 \iff r = 0$

PROPOSICIÓN 9

Si $r \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces $|r| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant r \leqslant +\varepsilon$

DEMOSTRACIÓN DE $\Longrightarrow$

Si $r \geqslant 0$,

Entonces $|r| = r$

y $|r| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow r \leqslant \varepsilon$

$\Longrightarrow -\varepsilon < 0 \leqslant r \leqslant \varepsilon$

$\Longrightarrow -\varepsilon \leqslant r \leqslant \varepsilon$

Si $r < 0$,

Entonces $|r| = -r$

y $|r| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow -r \leqslant \varepsilon$

$\Longrightarrow -\varepsilon \leqslant r$

$\Longrightarrow -\varepsilon \leqslant r < 0 < \varepsilon$

$\Longrightarrow -\varepsilon \leqslant r \leqslant \varepsilon$

DEMOSTRACIÓN DE $\Longleftarrow$

$$-\varepsilon \leqslant r \leqslant \varepsilon$$
$$\Longleftarrow$$
$$-\varepsilon \leqslant r \quad \text{y} \quad r \leqslant \varepsilon$$
$$\Longleftarrow$$
(prop. 5, 6°) $$-r \leqslant \varepsilon \quad \text{y} \quad r \leqslant \varepsilon$$
$$\Longleftarrow$$
$$|r| \leqslant \varepsilon$$

l.q.q.d.

Del mismo modo:

Si $r \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$,

Entonces $\boxed{|r| < \varepsilon \iff -\varepsilon < r < +\varepsilon}$

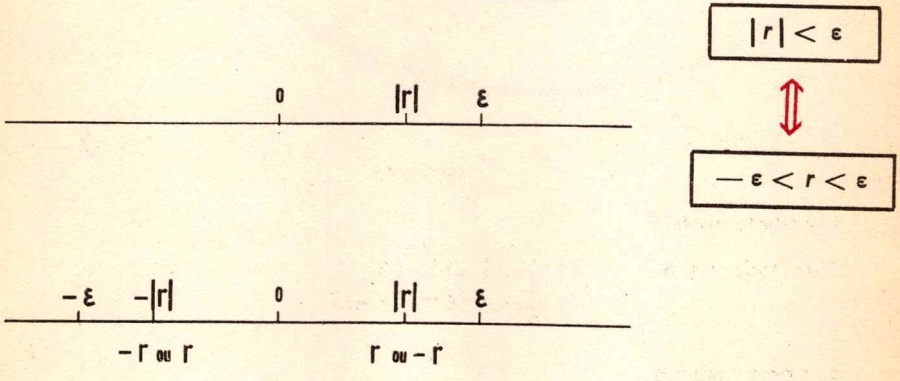


FIG. 133

La utilización del valor absoluto permite reemplazar la "desigualdad doble" $-\varepsilon < r < \varepsilon$ por la desigualdad simple $|r| < \varepsilon$

El teorema siguiente presenta una situación análoga, que será utilizada constantemente.

TEOREMA 2

Si $a, r \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$,

Entonces $\boxed{|r-a| < \varepsilon \iff a-\varepsilon < r < a+\varepsilon}$

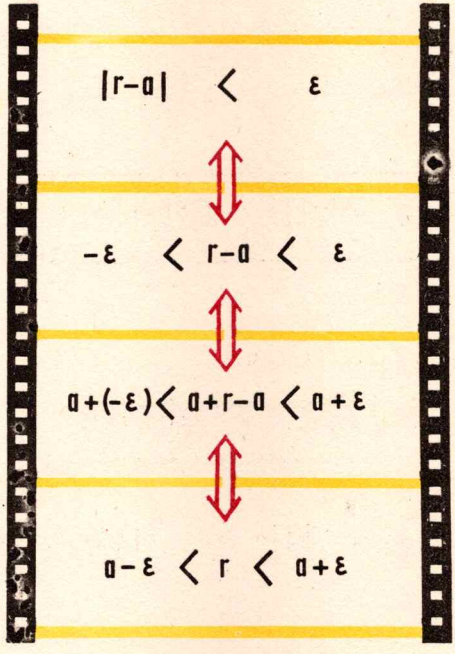


FIG. 134

l.q.q.d.

Inmediatamente:

Si $a, r \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces $\boxed{|r-a| \leqslant \varepsilon \iff a-\varepsilon \leqslant r \leqslant a+\varepsilon}$

Este teorema permite reformular la definición de valores aproximados.

DEFINICIÓN Si $a, r \in \mathbf{R}$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}_0^+$

Entonces

a es valor aproximado de r con error menor o igual que ε	*a es valor aproximado de r con error menor que ε*
ssi	**ssi**
$a - \varepsilon \leqslant r \leqslant a + \varepsilon$	$a - \varepsilon < r < a + \varepsilon$
ssi	**ssi**
$\lvert a - r \rvert \leqslant \varepsilon$	$\lvert a - r \rvert < \varepsilon$

PROPOSICIÓN 10

Para todo $a, b \in \mathbf{R}$: $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$

Desigualdad triangular

DEMOSTRACIÓN:

1º *probemos que para todo* $a, b \in \mathbf{R}$:

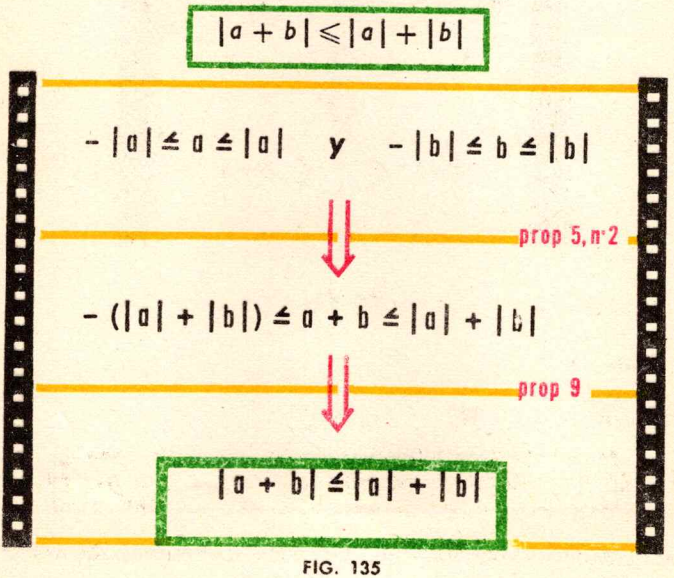


FIG. 135

2º Probemos que para todo $a, b \in \mathbf{R}$:

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b|$$

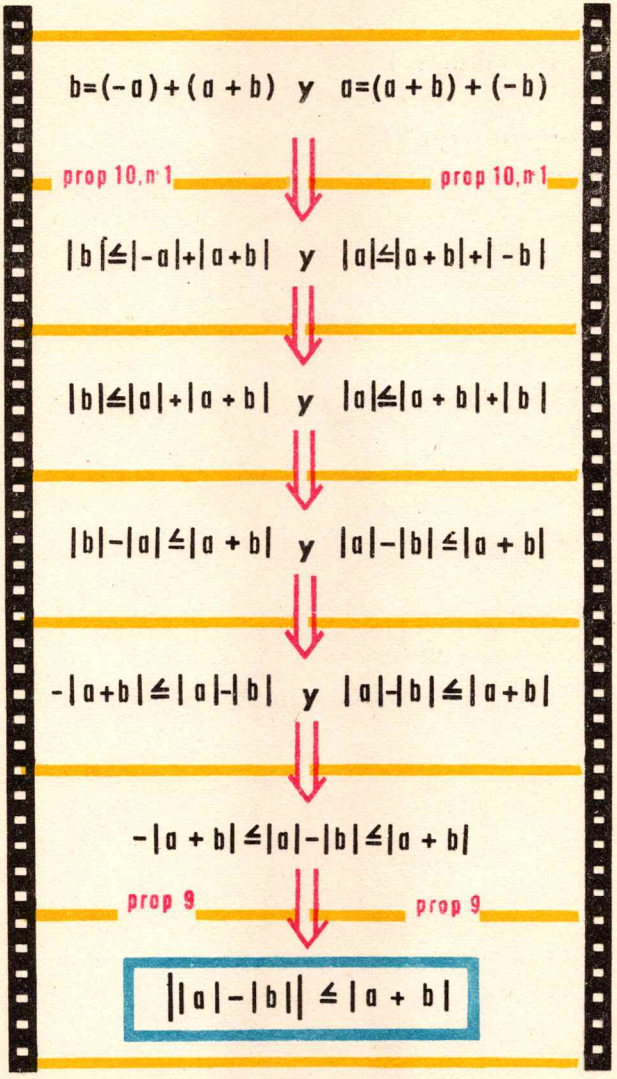


FIG. 136

EJERCICIOS

1. **Si** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : r \to |r|$

   Entonces $f\mathbf{R} = \mathbf{R}^+$.

2. **Si** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \to |x|$
   $r \in \mathbf{R}$,

   Entonces $\# f^{-1}\{r\} \in \{0, 1, 2\}$

3. **Si** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \to |x|$

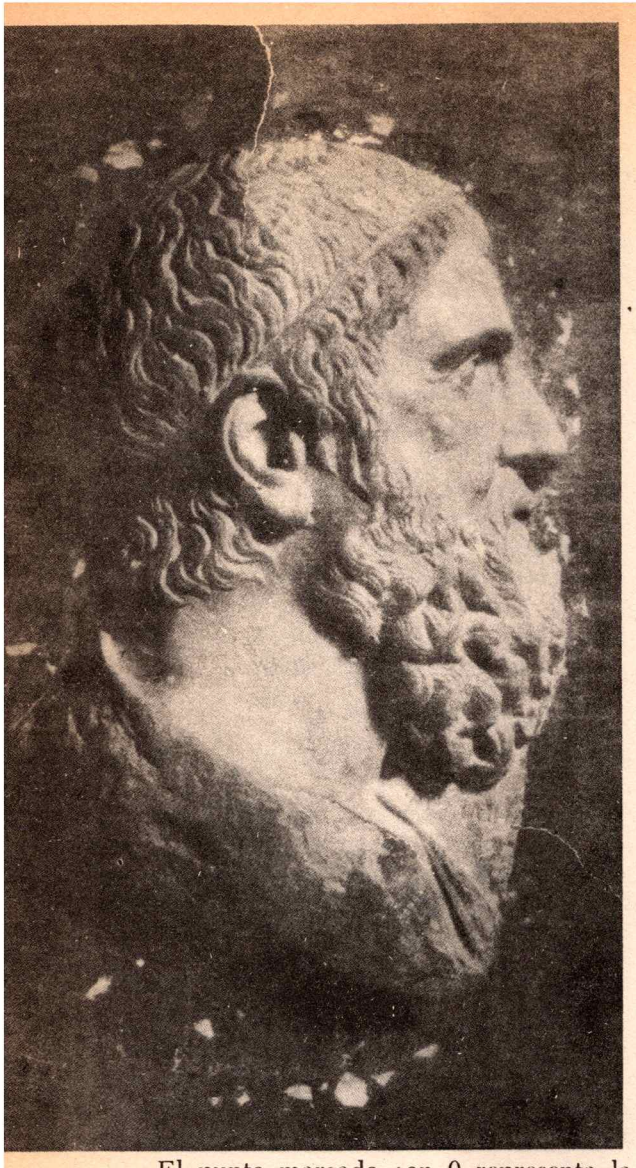
   Entonces $f^{-1}\{5\} = \{5, -5\}$
   $f^{-1}\{-6\} = \phi$
   $f^{-1}\{0\} = \{0\}$
   $f^{-1}\{2, -3, 5\} = \{2, -2, 5; -5\}$
   $f^{-1}\{-17; 0; 3{,}75; -2{,}457\} =$

4. **Si** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \to |x|$
   $r \in \mathbf{R}$

   Entonces $\# f^{-1}\{r\} = 0 \quad \Rightarrow \quad r \in \mathbf{R}_0^-$
   $\# f^{-1}\{r\} = 1 \quad \Rightarrow$
   $\# f^{-1}\{r\} = 2 \quad \Rightarrow$

5. **Si** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \to |x|$
   P es una parte finita de $\mathbf{R}$

   Entonces $\# f^{-1}\mathrm{P}$ impar $\iff 0 \in \mathrm{P}$



ARQUÍMEDES (287-212 a.J.C.)

En la escuela primaria te has iniciado en la medida de ciertas magnitudes. Has medido y calculado longitudes, volúmenes. Has **pesado,** es decir, has **medido pesos.**

Los cronómetros miden el tiempo.

El barómetro mide la presión atmosférica

El velocímetro mide la velocidad del automóvil.

La vida moderna impone numerosas medidas, a veces muy precisas.

Se llama magnitud a todo aquello que se puede medir.

Acabamos de enumerar varias clases de magnitudes. Existen muchas otras.

Una vez que se ha elegido la unidad para una magnitud, la **medida** se traduce finalmente mediante un **número real**

En los ejemplos citados, la medida es siempre positiva.

La medida de cargas eléctricas o magnéticas es **positiva** o **negativa.**

Uno de los pasos esenciales de toda medida consiste en graduar una recta.

El punto marcado con 0 representa la medida nula y el punto marcado con 1, la **unidad** elegida.

Para graduar la recta, hemos utilizado el orden y la adición de vectores.

Para medir conviene, pues, definir orden y adición (para la magnitud considerada). La ciencia en cuestión nos proporciona estos conocimientos.

Por ejemplo, la balanza nos permite saber cuál de dos pesos es el mayor (o el más pesado). Todo par de objetos nos permite realizar la adición de pesos.

Consideremos una determinada magnitud.

El orden y la adición han sido claramente definidos.

La elección de una unidad determina las magnitudes de medidas 2, 3, ... (eventualmente — 2, — 3, ...).

Para medir es necesario poder afirmar que toda magnitud está comprendida entre dos magnitudes de medidas z y z + 1, con $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$.

Dicho de otro modo, la magnitud considerada debe satisfacer el **axioma de Arquímedes**

Una vez que se ha admitido este axioma y que se ha elegido la unidad, es posible medir las magnitudes con error menor o igual que una unidad.

La adición y el orden permiten definir la media-unidad, determinando medidas correspondientes a la primera sub-graduación binaria.

Se repite el procedimiento mediante sucesivas sub-graduaciones, y ello determina medidas correspondientes a los binarios limitados.

En la práctica hay que detenerse después de un número finito de sub-graduaciones, porque no se dispone de instrumentos de medida de tanta precisión. Admitiremos sin embargo que toda magnitud tiene como medida un real bien determinado, que se obtiene repitiendo indefinidamente el procedimiento de sub-graduación.

Los números reales permiten concluir así, de manera ideal, la medida de magnitudes. Una recta graduada proporciona una imagen válida e intuitiva de toda magnitud. Además resulta esencial relacionar los números reales con esta representación geométrica fundamental en todas las ciencias aplicadas. El axioma de Arquímedes es indispensable para poder desarrollar el proceso de medida.

Este axioma había sido utilizado antes por **Eudoxio** (alrededor del 408 al 355 a.J.C.). Arquímedes aplicó sistemáticamente el axioma que lleva su nombre y los métodos de Eudoxo para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Calculó especialmente la longitud del círculo tomando la longitud del diámetro como unidad. Este número se escribe

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279 \text{ etc.}$$

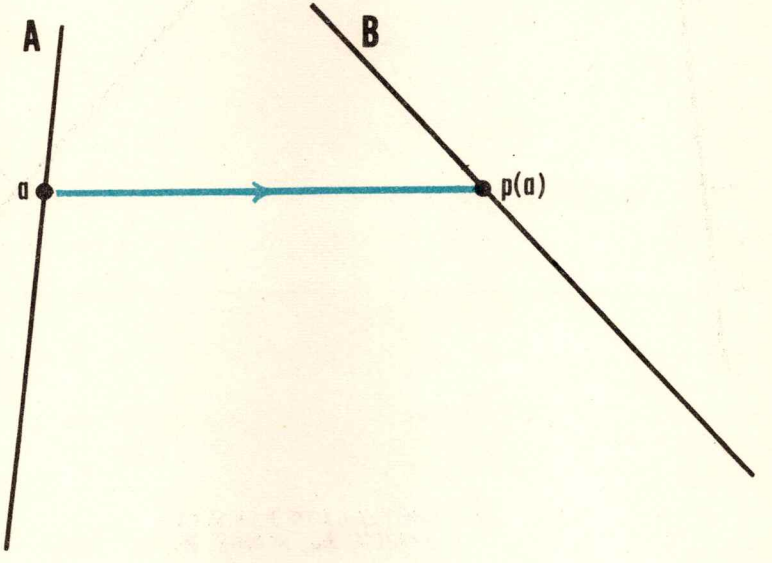
Arquímedes es uno de los gigantes de la ciencia matemática. Originario de un medio aristocrático, hijo de un astrónomo, vivió en Siracusa (Sicilia) cumpliendo las funciones de consejero del tirano Hieron. Hizo descubrimientos fundamentales, no sólo en matemática sino también en física y mecánica. Inventó varias máquinas, destacándose ciertos aparatos militares destinados a defender a Siracusa, amenazada de invasión por los romanos. Después de la caída de la ciudad, fue muerto por los soldados enemigos.

8

Teorema de Thales

1 — ENUNCIADO DEL TEOREMA DE THALES

He aquí la proyección paralela $p: A \to B$



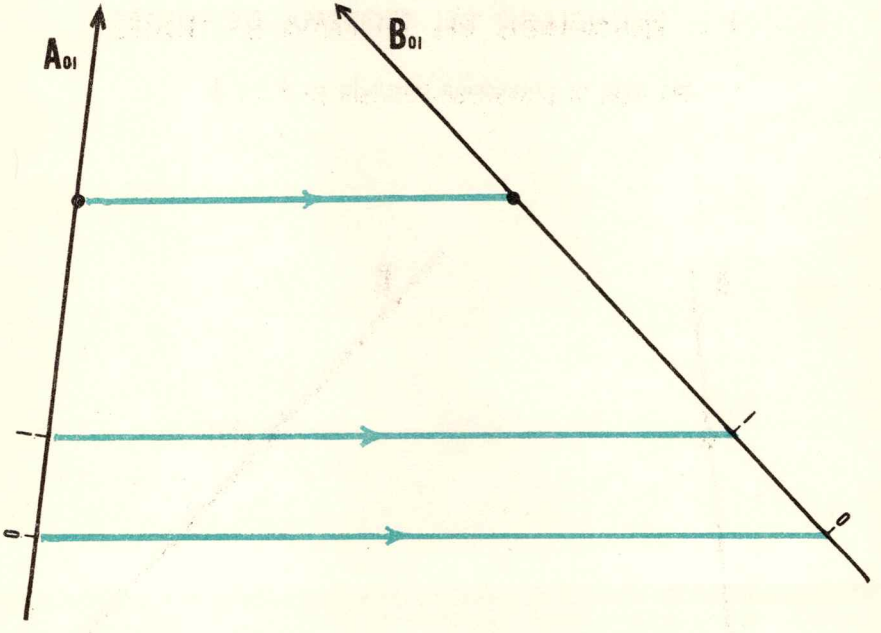
PROYECCIÓN PARALELA
p: A → B

FIG. 137

— La proyección paralela p aplica la recta A sobre la recta B.
Gradúa A y proyecta esta graduación sobre B.

— Marco 0 y 1 en dos puntos distintos de A.
Marco 0 y 1 en sus proyecciones.

— Las rectas A_{01} y B_{01} están orientadas.
Como $p(0) = 0$ y $p(1) = 1$, la proyección paralela p es creciente.

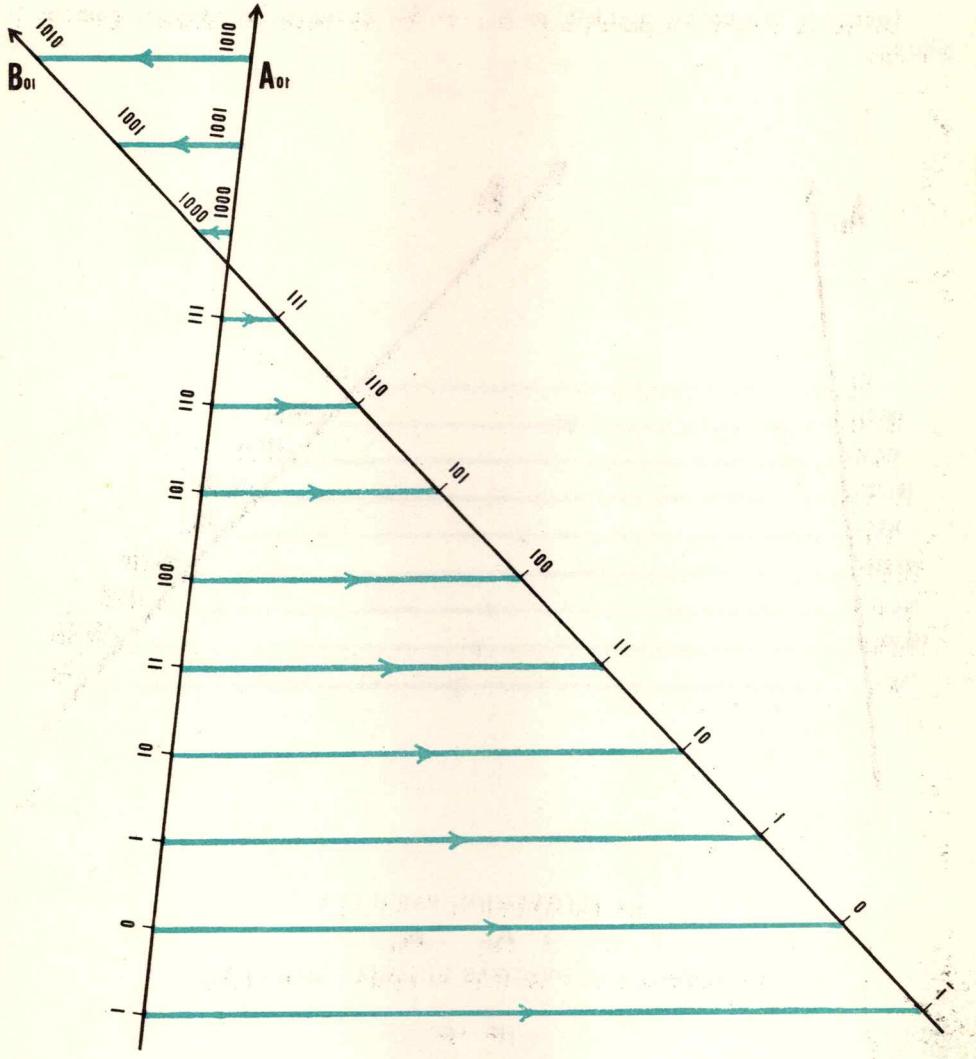


LA PROYECCIÓN PARALELA
p APLICA $\mathbf{A_{01}}$ SOBRE $\mathbf{B_{01}}$

FIG. 138

Para todo $z \in Z$:

La proyección paralela p aplica
el punto de abscisa z de A_{01}
sobre el punto de abscisa z de B_{01}



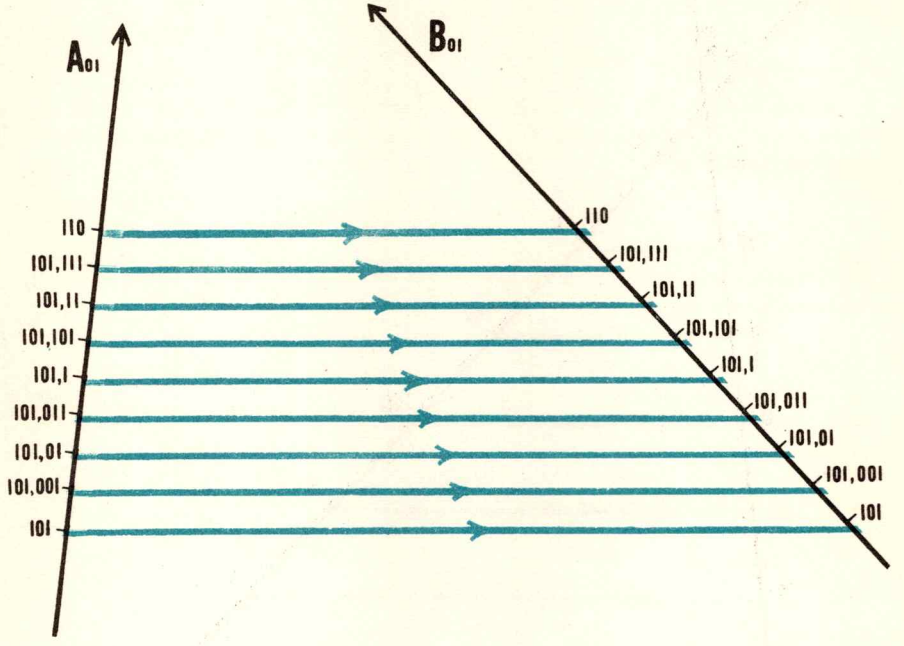
LA PROYECCIÓN PARALELA
$p : A_{01} \to B_{01}$
CONSERVA LAS ABSCISAS ENTERAS RACIONALES

FIG. 139

La proyección paralela p: $A_{01} \rightarrow B_{01}$ conserva las abscisas enteras racionales.

La proyección paralela p es creciente y conserva los puntos medios.

Luego la proyección paralela p: $A_{01} \rightarrow B_{01}$ conserva las abscisas binarias limitadas.



LA PROYECCIÓN PARALELA

p: $A_{01} \rightarrow B_{01}$

CONSERVA LAS ABSCISAS BINARIAS LIMITADAS

FIG. 140

Más generalmente, vamos a probar el

TEOREMA DE THALES

Toda proyección paralela p: $A_{01} \rightarrow B_{01}$

CONSERVA LAS ABSCISAS

2 — DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE THALES

La proyección paralela p aplica la recta graduada A_{01} sobre la recta graduada B_{01}

He aquí un punto $a \in A_{01}$

Tenemos que probar que

$$\text{abscisa de } a = \text{abscisa de } p(a)$$

Ya hemos establecido esta proposición cuando la abscisa de a es un número binario limitado, es decir, cuando a pertenece a una de las sub-graduaciones binarias sucesivas de A_{01}

Supondremos entonces que **a no pertenece a ninguna de las sub-graduaciones binarias sucesivas de A_{01}**

Sabemos que, en este caso, la abscisa de a está determinada por un solo binario ilimitado.

Para fijar ideas supongamos que

$$\text{abscisa de } a = 110{,}101100010111 \text{ etc.}$$

Debemos establecer que este binario ilimitado designa la abscisa de $p(a) \in B_{01}$

La demostración está basada en las propiedades siguientes:

La proyección paralela p: $A \rightarrow B$

- aplica la graduación de A_{01} sobre la de B_{01}
- conserva los puntos medios
- es creciente.

Primera etapa abscisa de $a = 110$, etc.

Luego el punto a está situado

después del punto de abscisa 110 de A_{01}
antes del punto de abscisa 111 de A_{01}

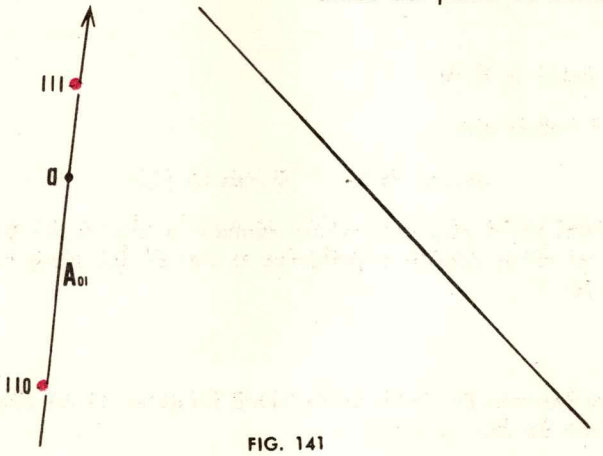


FIG. 141

La proyección paralela p aplica los puntos de abscisas 110 y 111 de A_{01}
sobre los puntos de abscisas 110 y 111 de B_{01}

Como la proyección p es creciente,
el punto $p(a)$ está situado

después del punto de abscisa 110 de B_{01}
antes del punto de abscisa 111 de B_{01}

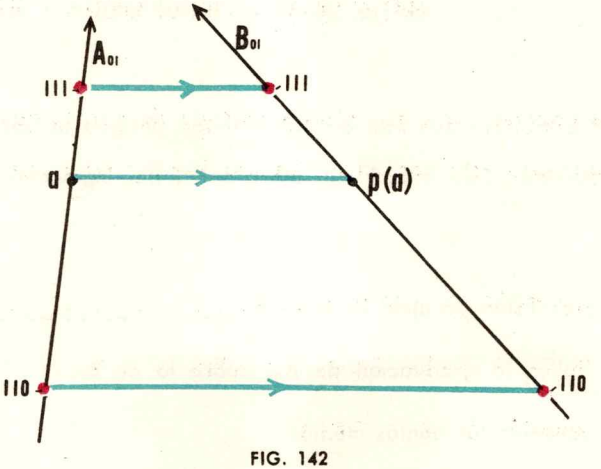


FIG. 142

Luego abscisa de $p(a) = 110$, etc.

Segunda etapa abscisa de a = 110,1 etc.

Luego el punto a está situado **después** del punto medio del segmento 110, ... de A_{01}

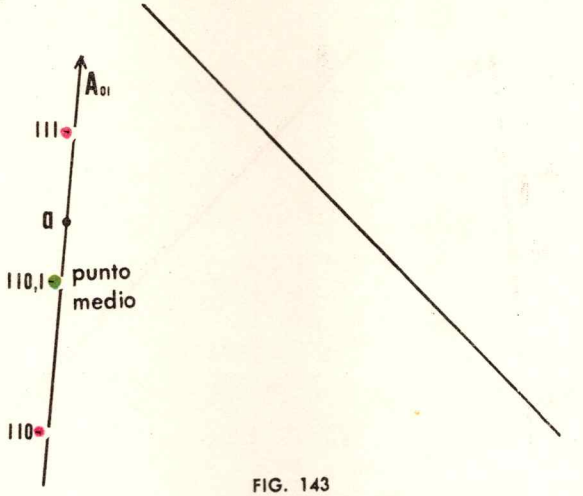


FIG. 143

Como la proyección paralela p es creciente y conserva el punto medio, el punto $p(a)$ está situado después del punto medio de 110, ... de B_{01}

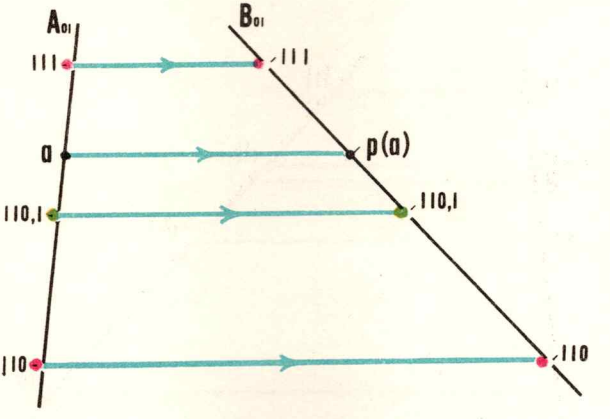


FIG. 144

Luego abscisa de $p(a)$ = 110,1 etc.

Tercera etapa abscisa de a = 110,10 etc.

Luego el punto a está situado **antes** del punto medio del segmento 110,1 ... de A_{01}

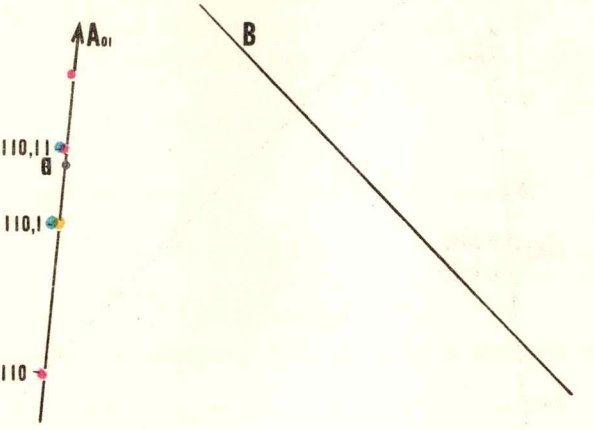


FIG. 145

Como la proyección paralela p es creciente y conserva el punto medio, el punto $p(a)$ está situado **antes** del punto medio del segmento 110,1 ... de B_{01}

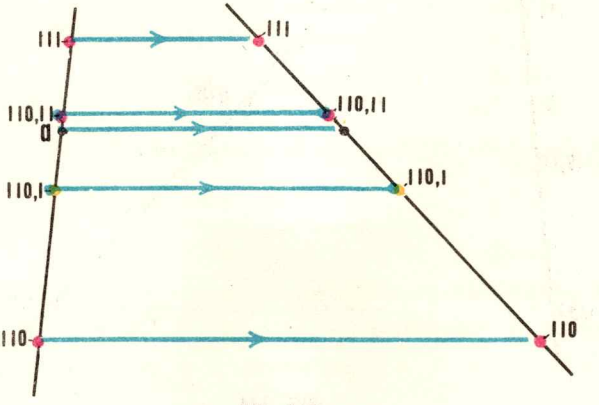


FIG. 146

Luego abscisa de $p(a)$ = 110,10 etc.

Cuarta etapa

abscisa de a = 110,101 etc.

Luego . . .

abscisa de $p(a)$ = 110,101 etc.

Quinta etapa

. . . etc.

Los puntos a y $p(a)$ tienen la misma abscisa

l.q.q.d.

* * *

— La proyección paralela p aplica la recta graduada A_{01} sobre la recta graduada B_{01}
Si los puntos $a \in A_{01}$ y $b \in B_{01}$ tienen la misma abscisa $r \in R$
¿Entonces?

— **Entonces** $b = p(a)$

— ¿Por qué?

— Por el teorema de Thales,

abscisa de $p(a)$ = abscisa de a = r

Se nos indica que

abscisa de b = abscisa de a = r

Luego abscisa de b = abscisa de $p(a)$ = r

Pero no existe más que un punto de B_{01} de abscisa r

Luego $b = p(a)$

— Mejoremos el enunciado del teorema de Thales

TEOREMA DE THALES

Si **la proyección paralela** p
aplica la referencia de A_{01} **sobre la de** B_{01}
Entonces **para todo** $a \in A$ **y para todo** $b \in B$

abscisa de a = abscisa de b $\iff$ **$b = p(a)$**

3 — GENERALIZACIÓN

Pudimos establecer el teorema de Thales porque

La proyección paralela p: A → B

- aplica la graduación de A_{01} sobre la de B_{01}
- conserva los puntos medios
- es creciente

Esta demostración continúa siendo íntegramente válida si en ella reemplazamos la proyección paralela p por cualquier aplicación f tal que

la aplicación f: A → B

- aplica la graduación de A_{01} sobre la de B_{01}
- conserva los puntos medios
- es creciente

TEOREMA 2

He aquí dos rectas graduadas A_{01} y B_{01}

y una aplicación f: A → B

Si

- **f aplica la referencia de A_{01} sobre la de B_{01}**
- **conserva los puntos medios**
- **es creciente**

Entonces para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$

abscisa de a = abscisa de b $\iff$ **$b = f(a)$**

(y f es pues una biyección)

DEMOSTRACIÓN:

Basta observar que toda aplicación f que aplica la referencia de A_{01} sobre a de B_{01} y conserva el punto medio, aplica la graduación de A_{01} sobre la de B_{01}

La demostración del parágrafo 2 continúa siendo válida si en ella se sustituye p por f.

l.q.q.d.

4 — EJERCICIOS

1. He aquí tres puntos no alineados a, b, c.
Gradúa ab marcando 0 en a y 1 en b.
Gradúa ac marcando 0 en a y 1 en c.
Llamemos p a la proyección paralela a bc de ab sobre ac.
Para todo $x \in (ab)_{01}$ y $y \in (ac)_{01}$,

abscisa de x = abscisa de y	$\Longleftrightarrow$	$y = p(x)$

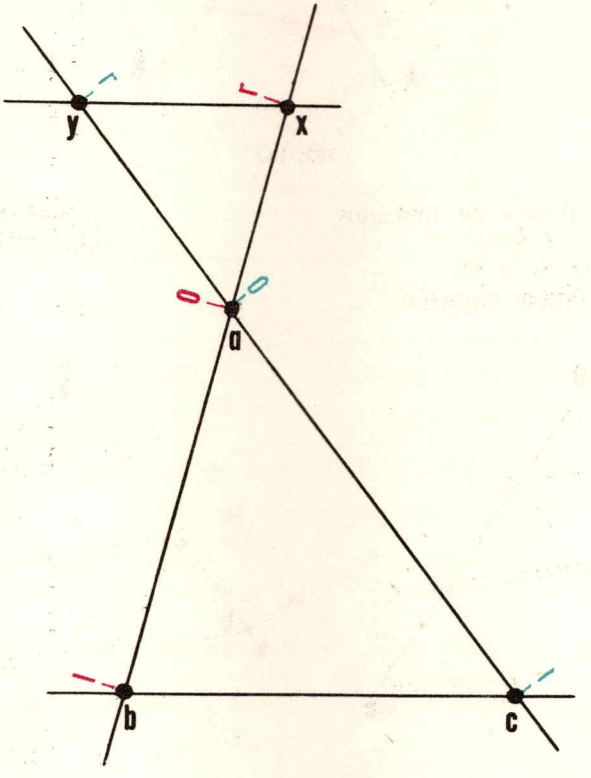


FIG. 147

2. He aquí tres puntos no alineados a, b, c.
Desde hace tiempo sabes que la recta que comprende los puntos medios de los segmentos $[ab]$ y $[ac]$ es paralela a bc.
Deduce esta proposición del teorema de Thales.

3. He aquí las rectas secantes A y B.
Hagamos $A \cap B = \{c\}$
Gradúa A y proyecta su graduación sobre B mediante una proyección paralela.
Muestra que el punto c tiene la misma abscisa con respecto a A_{01} que con respecto a B_{01}.

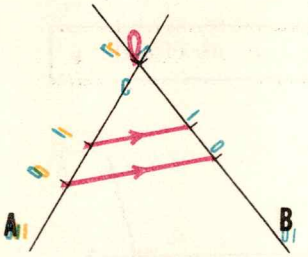


FIG. 148

4. He aquí tres puntos no alineados
a, b, c
Elige un punto $x_1 \in ab$
Examina el dibujo siguiente.

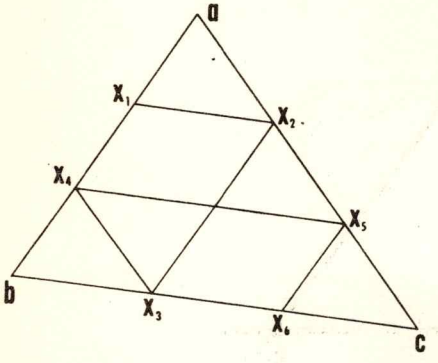


FIG. 149

¿Cómo hemos construido los puntos x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6?

¿Quieres construir x_7?
¿Qué observas?

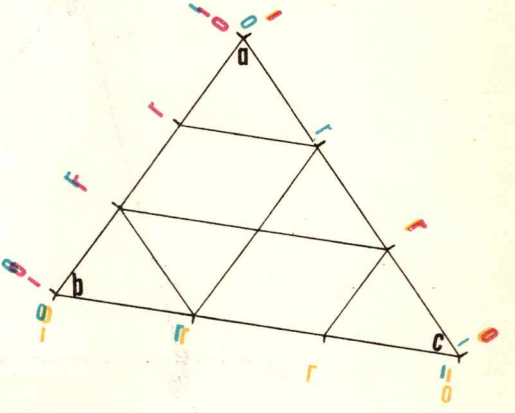


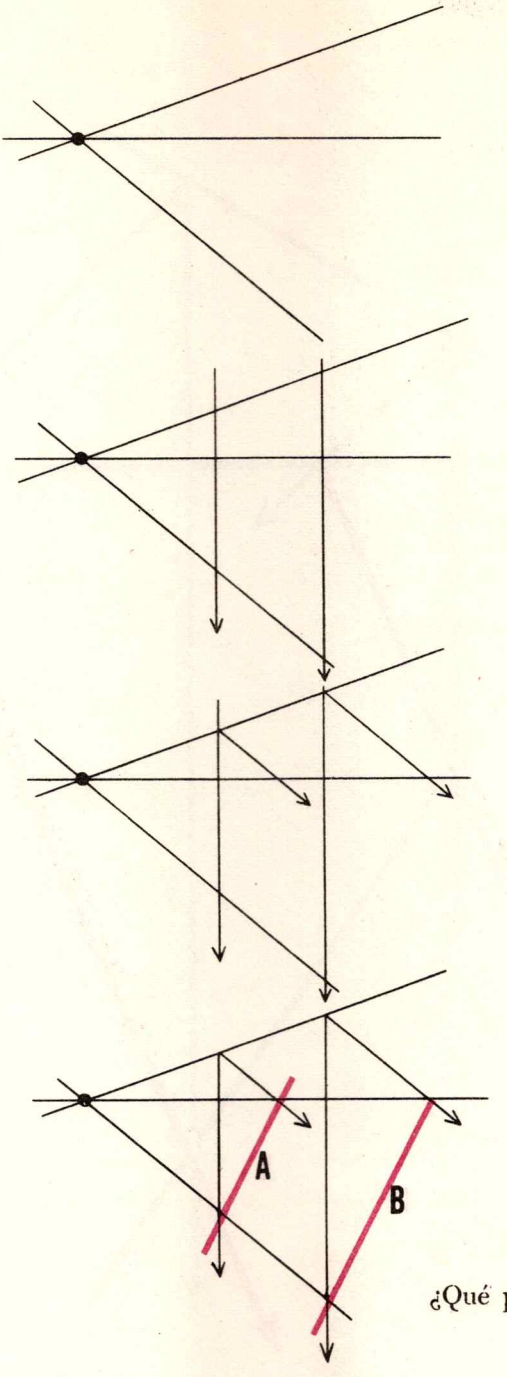
FIG. 150

Establece que $x_7 = x_1$
es decir que $x_6x_1 // ac$

¿Quieres comenzar nuevamente las construcciones anteriores, tomando para x_1

- el punto medio de $[a, b]$
- un punto que no pertenezca al segmento $[a, b]$
- el punto a
- el punto b

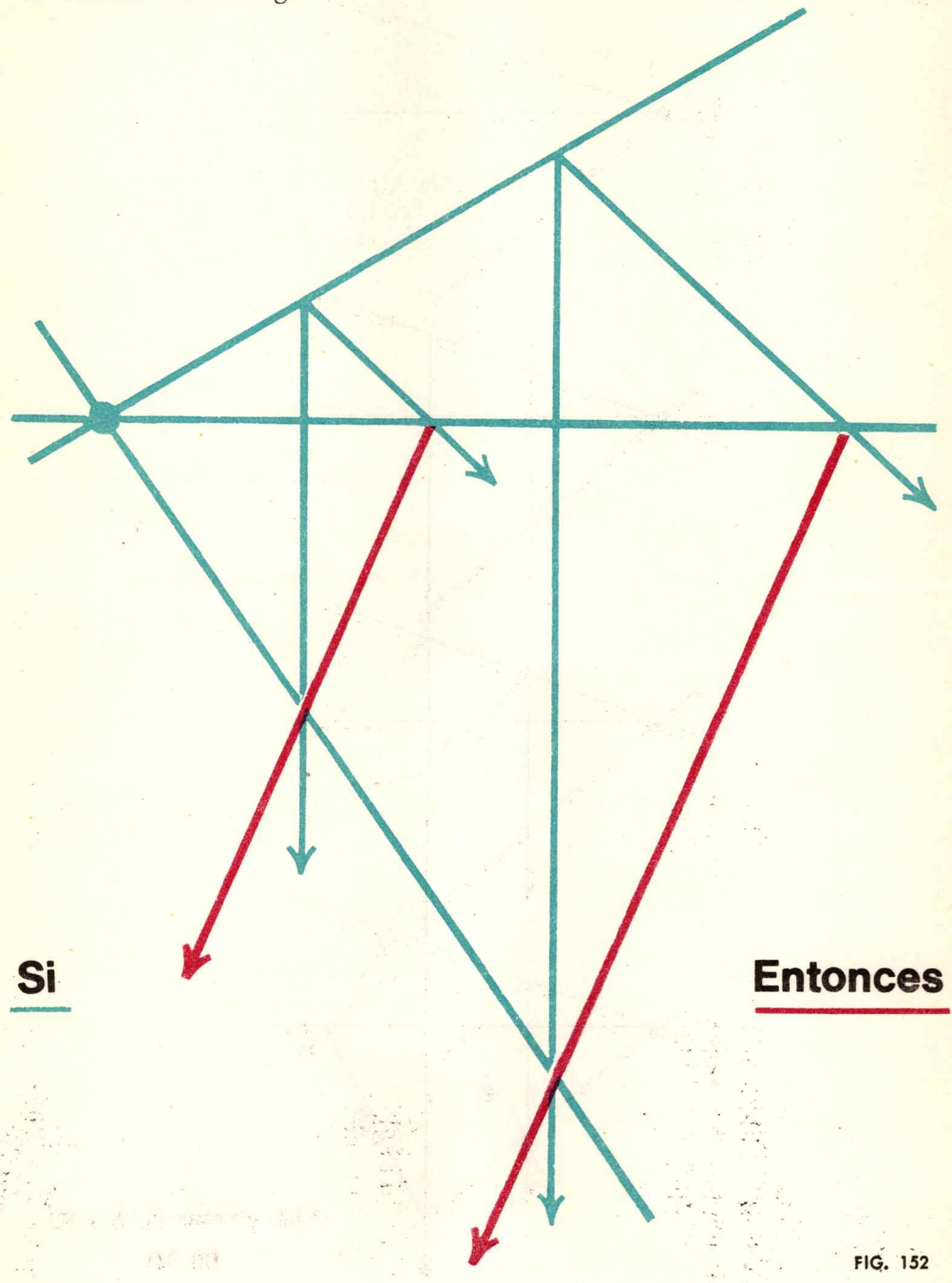
5.



¿Qué piensas de A y B?

FIG. 151

6: Teorema de Desargues



Si **Entonces**

FIG. 152

5 — LAS MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO

He aquí puntos no alineados *a*, *b*, *c*

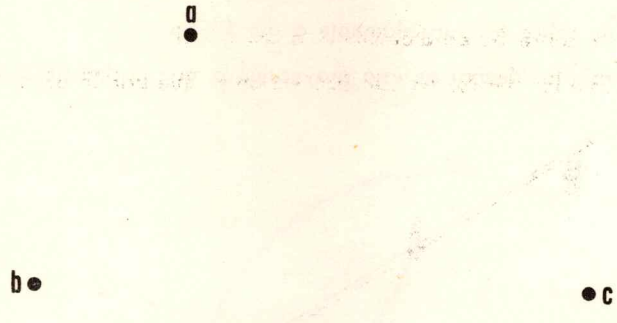


FIG. 153

Llamemos *m*, *n*, *p*, a los puntos medios de los lados

[*b*, *c*]; [*c*, *a*]; [*a*, *b*] del triángulo *abc*

Los segmentos [*a*, *m*]; [*b*, *n*]; [*c*, *p*] se llaman **medianas** del triángulo.

TEOREMA — *Las tres medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto llamado* **centro de gravedad** (o *baricentro*) *del triángulo.*

Además,

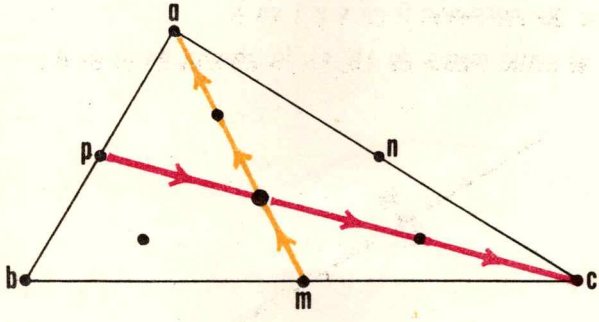


FIG. 154

DEMOSTRACIÓN:

1º ***am*** *corta* ***bn*** *corta* ***cp*** *corta* ***am***
Basta probar que

am corta ***bn***

Si esta afirmación fuese falsa, se tendría *am* // *bn*

Admitamos momentáneamente esta eventualidad

$$am \;//\; bn$$

Proyecta *ac* sobre *bc* paralelamente a *am* // *bn*

Traza en rojo las flechas de esta proyección *p*, que parten de *a*, *n*, *c*

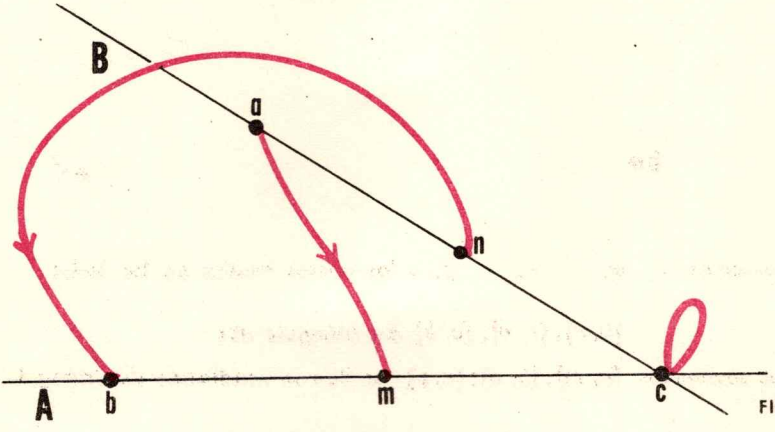


FIG. 155

Gradúa B = *ac* marcando 0 en *c* y 1 en *n*

Como *n* es el punto medio de [*a*, *c*], la abscisa de *a* es 10

Gradúa A = *bc* marcando 0 en *c* y 1 en *b*

Como *m* es el punto medio de [*b*, *c*], la abscisa de *m* es 0,1

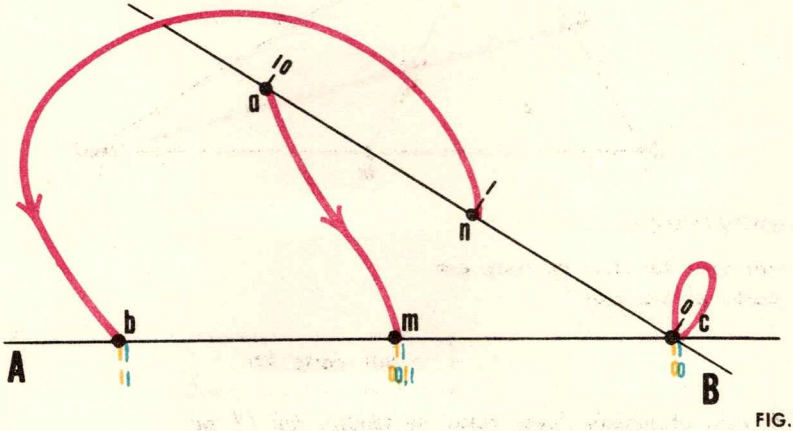


FIG. 156

La proyección paralela p aplica la referencia de B_{01}

sobre la de A_{01}

y conserva por consiguiente las abscisas.

De donde

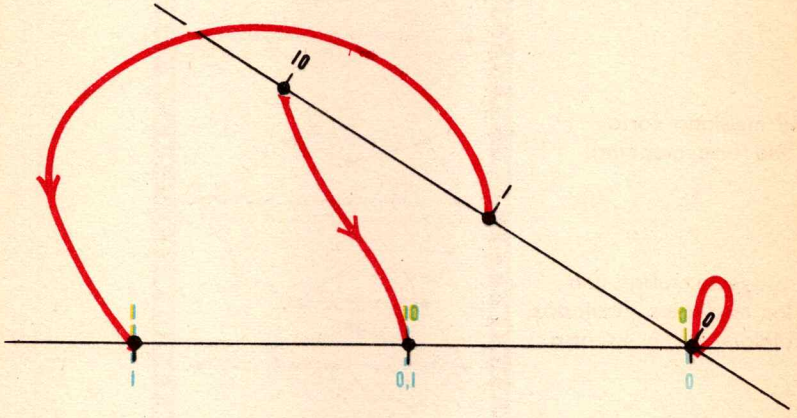


FIG. 157

Así,

$am \parallel bn$ implica $0,1 = 10$

lo cual es FALSO

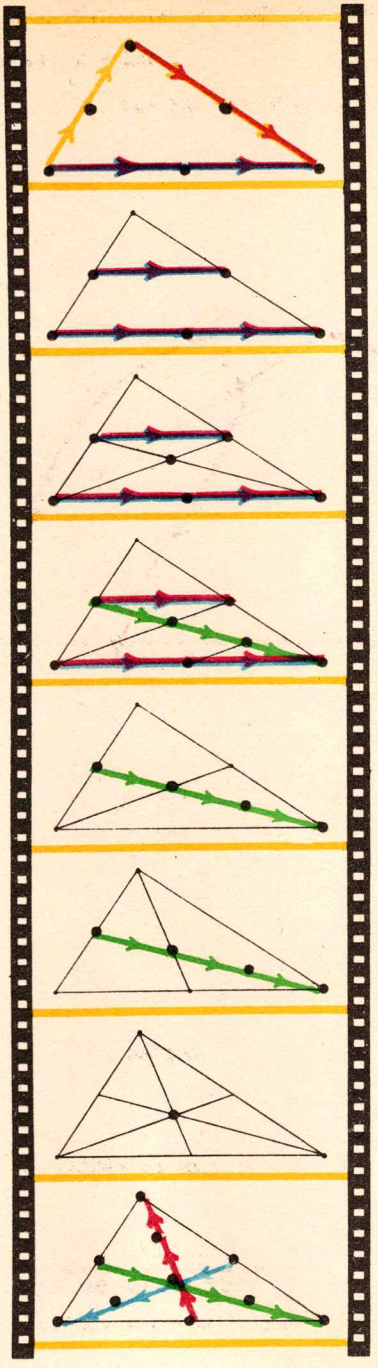
Luego am corta bn

l.q.q.d.

2º **Si**

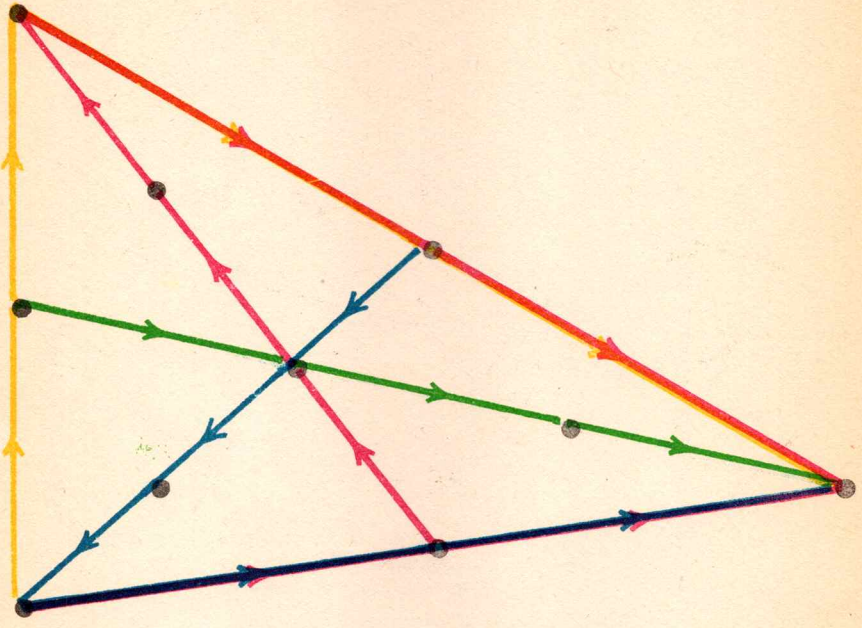
Toda mediana corta
a toda otra mediana.

Se proyecta sobre una
de las medianas dibujadas
paralelamente a la otra



Entonces

FIG. 158

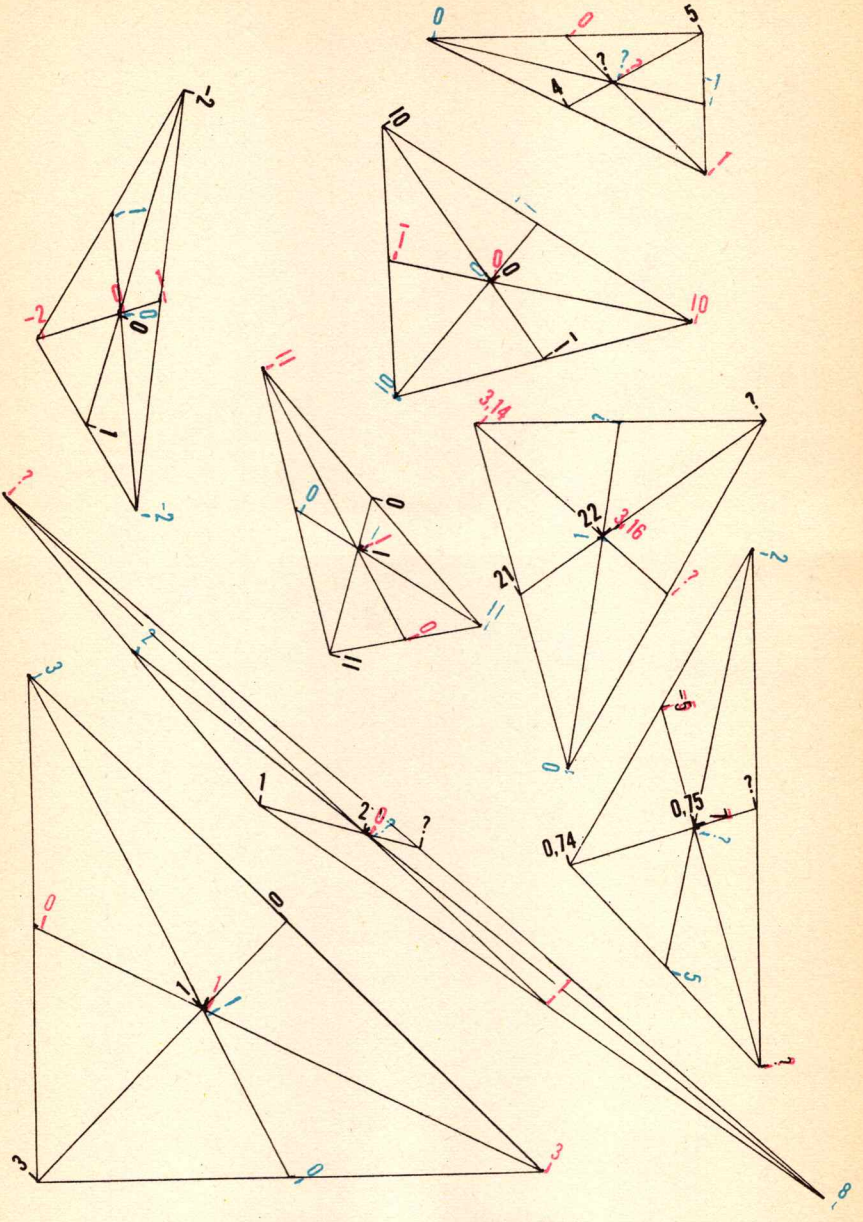


EL TEOREMA DE LAS MEDIANAS

FIG. 159

EJERCICIOS

1.



TRIÁNGULOS Y SUS MEDIANAS

FIG. 160

2. Construye un triángulo de madera terciada.
Traza sus medianas.
En su centro de gravedad fija un pitón.
Suspende el triángulo por medio de un hilo atado al mismo.
¿Qué compruebas?

3. Construye un paralelogramo de madera terciada.
En el punto de intersección de sus diagonales fija un pitón.
Suspende el paralelogramo por medio de un hilo atado al mismo.
¿Qué compruebas?

El punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo se llama también centro de gravedad del paralelogramo.

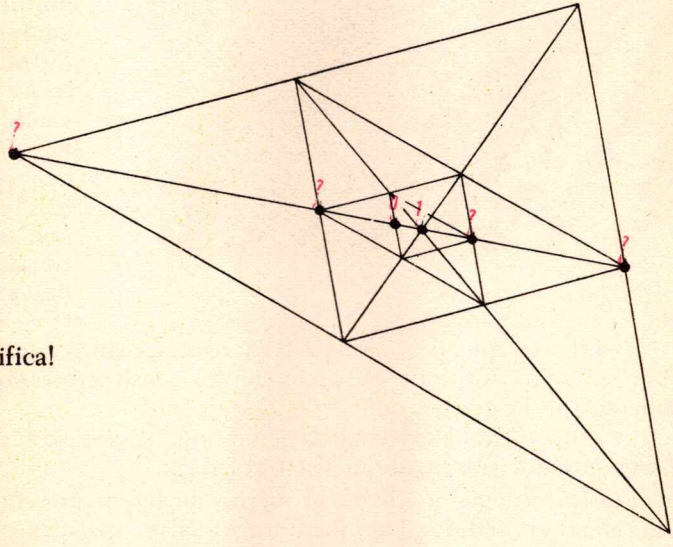
4. Construye un triángulo de cartón.
Utilizando una aguja, atraviésalo en su centro de gravedad.
Haz girar el triángulo alrededor de la aguja.
Con ella, atraviesa el triángulo en un punto próximo a uno de sus vértices, haciendo girar.
¿Qué compruebas?

5. La misma experiencia con un paralelogramo de cartón.

6. El centro de gravedad de un paralelogramo es su centro de simetría.

7. El centro de gravedad de un triángulo no es nunca su centro de simetría.

8.



...¡y justifica!
FIG. 161

Thales es el más antiguo de los matemáticos griegos de los cuales la historia ha conservado el nombre.

Según algunos es de origen fenicio, y vivió alrededor del año 600 a.J.C. en Mileto, la ciudad griega más próspera, sobre el litoral mediterráneo de Asia Menor.

No nos ha llegado ningún texto de Thales y en los escritos que le conciernen es difícil separar la verdad histórica y la leyenda. Platón lo presenta como a un sabio distraído que cae en un pozo observando las estrellas. Otros pretenden que fue un hábil comerciante que hizo fortuna con la comercialización del aceite.

Lo que es cierto es que por razones comerciales realizó, durante su juventud, un viaje a Egipto. Allí tomó contacto con los constructores de pirámides y sus conocimientos de la geometría.

De regreso a Mileto, funda la Escuela jónica que se convierte rápidamente en uno de los grandes centros de la Ciencia griega.

Generalmente se reconoce a Thales el mérito de haber presentado los resultados anteriormente difundidos, bajo una forma a la vez más general y simple,

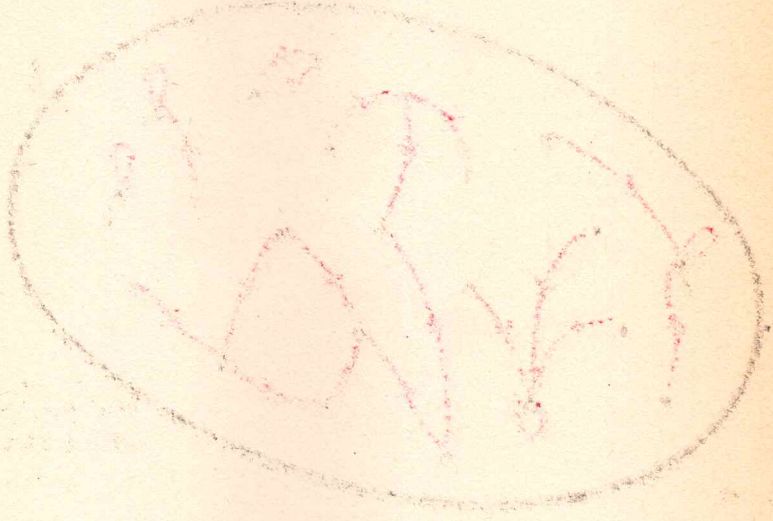
utilizando el razonamiento y la lógica. Habría echado así las bases sólidas para el futuro edificio de la geometría griega.

No se posee ninguna prueba cierta para asegurar que Thales fue realmente el padre del teorema que lleva su nombre. Se le atribuye este descubrimiento porque parece que lo utilizó en numerosas aplicaciones, sobre todo para el cálculo de la altura de las pirámides y de la distancia de un barco a la costa.

Thales debió sin duda una gran parte de sus conocimientos de astronomía a los babilonios. Según la leyenda, predijo el eclipse de sol de 585 a.J.C, pero este hecho ha sido discutido por numerosos historiadores.

Desempeñó un papel muy importante en la vida política de Mileto.

Más tarde, los griegos lo consideraron como uno de los Siete Sabios de Grecia.

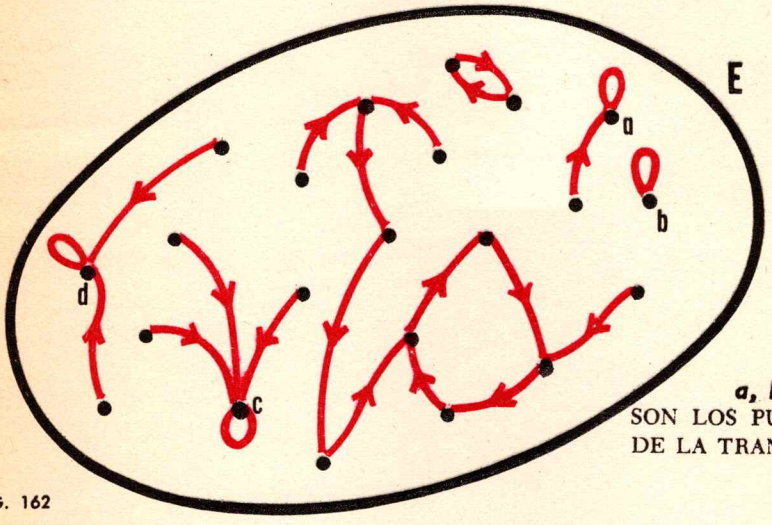


9

Homotecias

1 — PUNTOS FIJOS DE UNA TRANSFORMACIÓN

Observa este esquema de una transformación *t* del conjunto E



a, b, c, d,
SON LOS PUNTOS FIJOS
DE LA TRANSFORMACIÓN
t

FIG. 162

DEFINICIÓN — *He aquí una transformación* $t : E \to E$ y $x \in E$

$$\boxed{x \text{ es un } \textbf{punto fijo} \text{ de } t} \iff \boxed{t(x) = x}$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el conjunto de puntos fijos de una simetría central?
2. ¿Cuál es el conjunto de puntos fijos de la proyección del plano Π sobre la recta B, paralelamente a $A \nparallel B$?
3. El plano Π es el conjunto de puntos fijos de 1_π
4. El conjunto de puntos fijos de una traslación no idéntica es vacío.

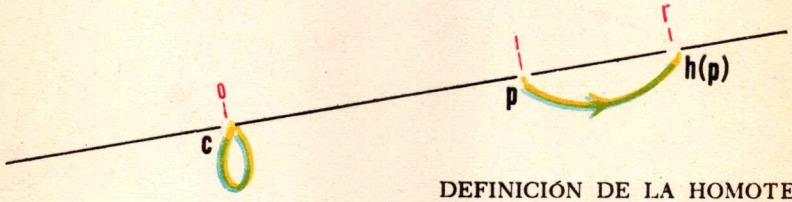
5. **Si** x es un punto fijo de las transformaciones t_1 y t_2 del conjunto E
   Entonces x es un punto fijo de t_2 o t_1

6. ¿Cuál es el conjunto de puntos fijos de la transformación f de R:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \to |x|$$

2 — HOMOTECIA DE CENTRO c Y DE RAZÓN r

DEFINICIÓN — *Para todo punto* **c** *y todo número real* **r**, *se llama* **homotecia de centro c y de razón r**, *a la transformación* $\boldsymbol{h} : \Pi \to \Pi$ *claramente definida por*



DEFINICIÓN DE LA HOMOTECIA **h** DE CENTRO **c** Y DE RAZÓN **r**

FIG. 163

La razón de la homotecia *h* se anotará $\rho(h)$

Imagen $\boldsymbol{h(x)}$ *del punto* $\boldsymbol{x} \in \Pi$ *por la homotecia* **h** *de centro* **c** *y de razón* **r**
Si $x = c$, **Entonces** $h(x) = c$
Si $x \neq c$, **Entonces** se provee cx de la referencia que se obtiene marcando 0 en **c** y 1 en **x** La imagen $h(x)$ es el punto de abscisa r

— He aquí dos nuevos puntos *a* y *b*

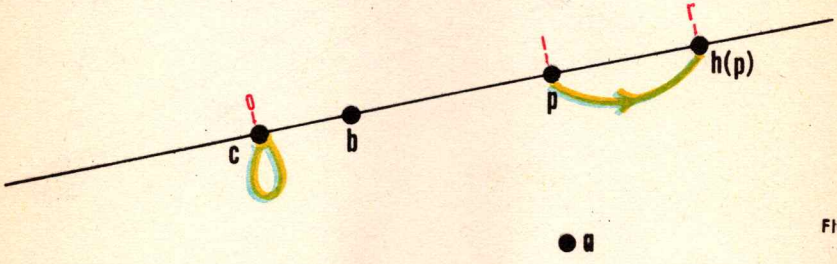


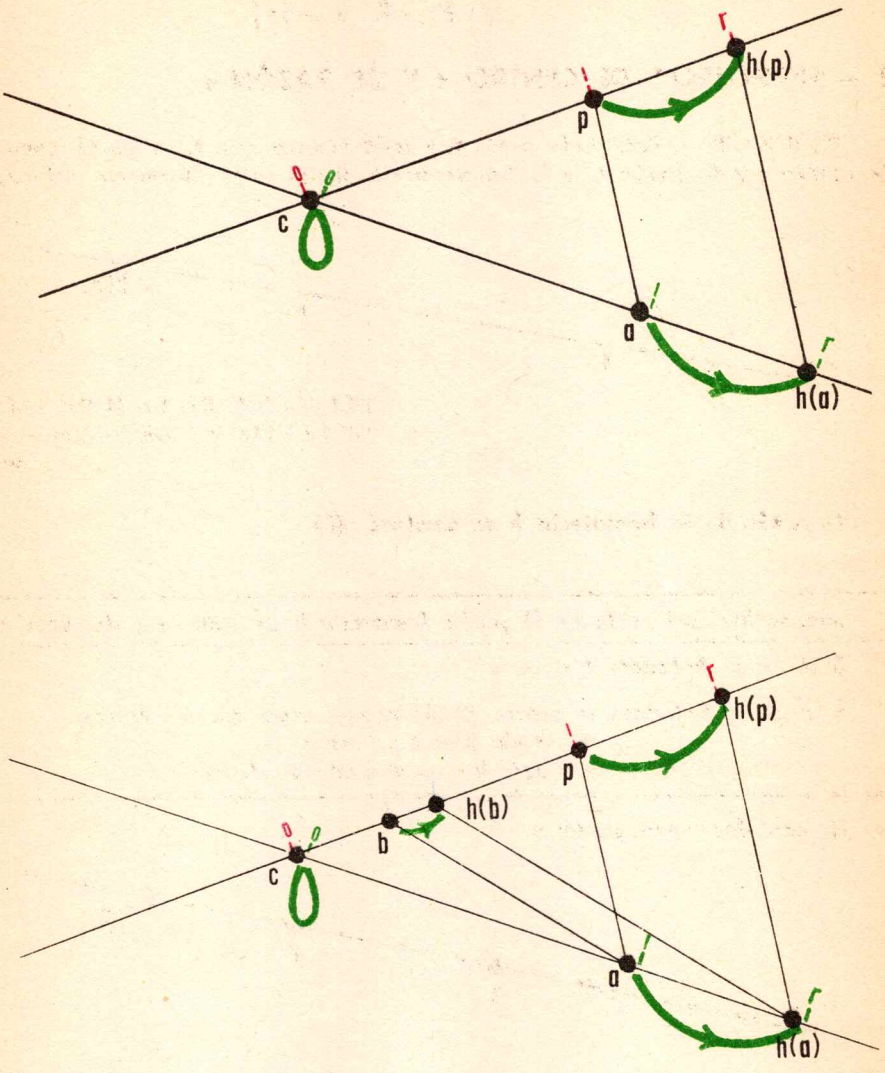
FIG. 164

— ¿Quieres determinar las imágenes $h(a)$ y $h(b)$?

— ...

— ¿Es necesario construir separadamente las graduaciones relativas a *a* y *b*?

— El teorema de Thales permite construir *h(a)* y *h(b)* mediante proyecciones paralelas.



CONSTRUCCIÓN DE UNA HOMOTECIA MEDIANTE PROYECCIONES PARALELAS

FIG. 165

— Toma varios puntos del plano y construye sus imágenes mediante este procedimiento expeditivo.

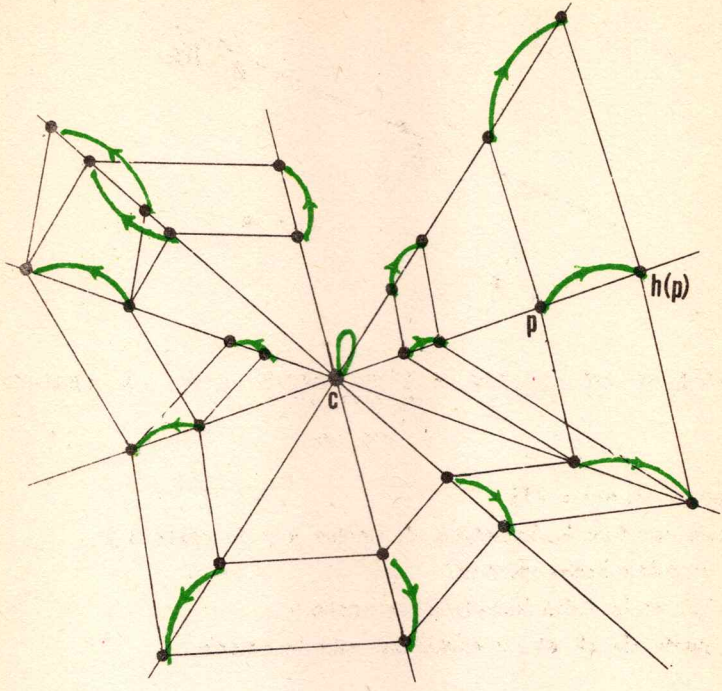


FIG. 166

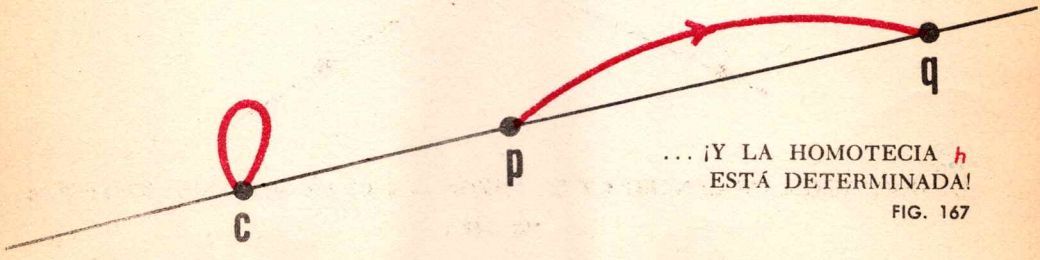
CONSTRUCCIÓN DE UNA HOMOTECIA MEDIANTE PROYECCIONES PARALELAS

Hasta aquí, hemos establecido la

PROPOSICIÓN 1

Si *c, p, q son puntos alineados tales que* $c \neq p$

Entonces *existe una y sólo una homotecia h de centro c tal que* $h(p) = q$

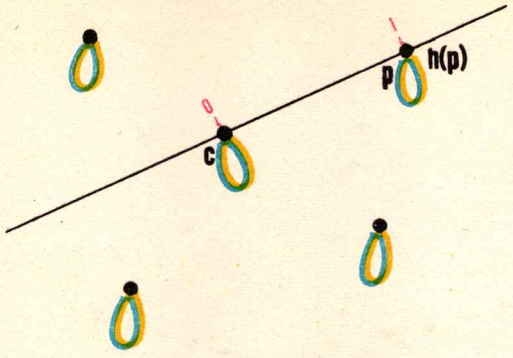


... ¡Y LA HOMOTECIA *h* ESTÁ DETERMINADA!

FIG. 167

3 — HOMOTECIAS PARTICULARES

¿Quieres construir la homotecia de centro c y de razón 1?



LA HOMOTECIA DE CENTRO **c** Y DE RAZÓN 1 ES LA TRANSFORMACIÓN IDÉNTICA 1_π

FIG. 168

— He aquí un punto $a \in \Pi$

¿Quieres construir la homotecia de centro a y de razón 1 ?

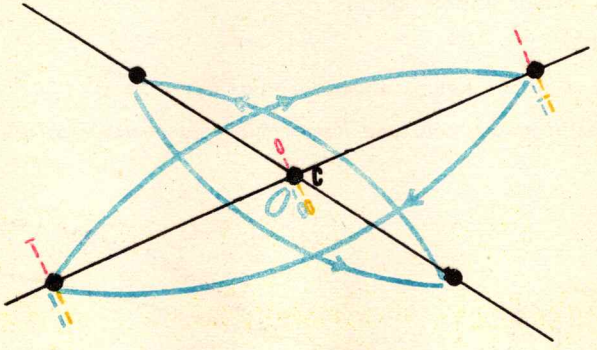
— Es la transformación idéntica.

— Así, 1_π es la única homotecia de razón 1.

Todo punto de Π es un centro de esta homotecia.

***

— ¿Quieres construir la homotecia de centro c y de razón —1?



LA HOMOTECIA DE CENTRO **c** Y DE RAZÓN — 1 ES LA SIMETRÍA CENTRAL s_c

FIG. 169

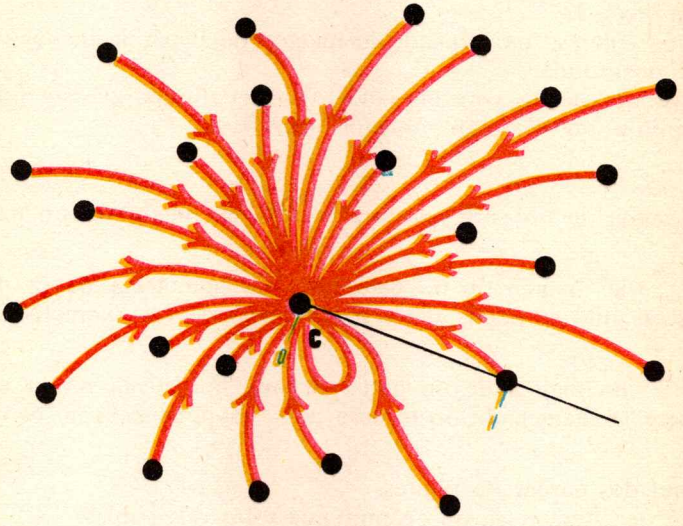
PROPOSICIÓN 2

a) *Toda homotecia de razón 1 es igual a la transformación idéntica.*
El centro de una homotecia no idéntica es su único punto fijo.

b) *La homotecia de centro* **c** *y de razón nula es la transformación constante* **c**

c) *La homotecia de centro* **c** *y de razón* —1 *es la simetría central* s_c

— ¿Quieres construir la homotecia de centro c y de razón nula?



LA HOMOTECIA DE CENTRO **c** Y DE RAZÓN NULA ES LA TRANSFORMACIÓN CONSTANTE **c**

FIG. 170

4 — EJERCICIOS

1. He aquí un punto **o** y una parte **P** del plano Π.

FIG. 171

¿Quieres contruir en verde la imagen de P por la homotecia de centro o y de razón 2?
¿Quieres construir en violeta la imagen de P por la homotecia de centro o y de razón 0,6?
¿Quieres construir en amarillo la imagen de P por la homotecia de centro o y de razón −2,3?
¿Quieres construir en anaranjado la imagen de P por la homotecia de centro o y de razón −0,7?
¿En qué color se ha dibujado la imagen de P por la homotecia de centro o y de razón 1?
¿En qué color se ha dibujado la imagen de P por la homotecia de centro o y de razón nula?
Observa dos de los corazones no rojos del dibujo. ¿Existe una homotecia que aplique uno de ellos sobre el otro?

2. ¿La imagen de un gato por una homotecia, puede ser un ternero?

3. **Si** la imagen de un gato por una homotecia no es un gato
Entonces ¿qué se puede decir de la razón de esta homotecia?

4. **Si** la imagen de un gato por una homotecia no es un gato
Entonces la imagen de un ternero por esta homotecia no es un ternero.

5. He aquí dos cuplas de puntos.
¿Existe una homotecia que comprenda estas dos cuplas?

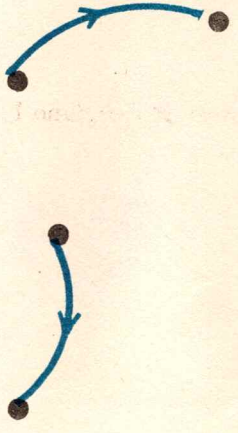


FIG. 172

6. La misma pregunta para las cuplas siguientes.

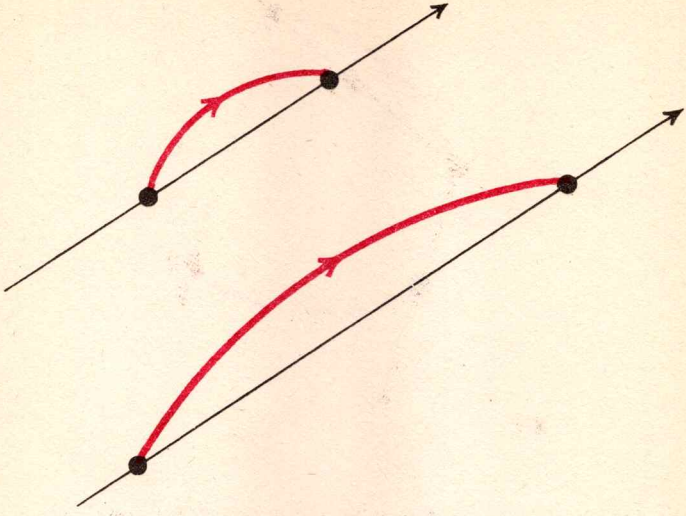


FIG. 173

7. La misma pregunta.

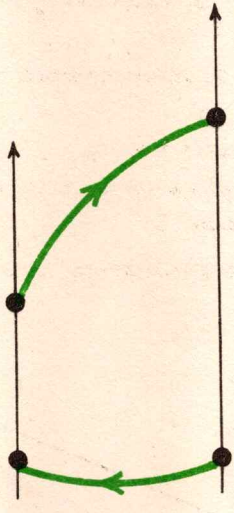


FIG. 174

8. Existe una y sólo una homotecia que comprende las cuplas siguientes.

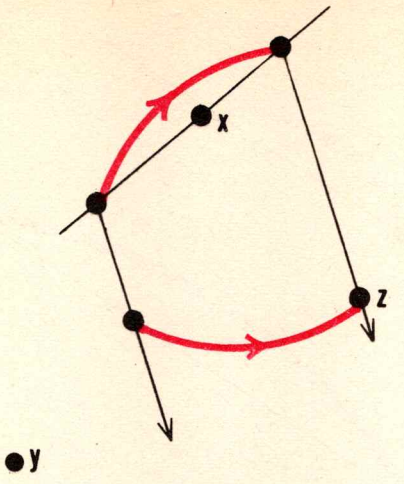


FIG. 175

¿Quieres determinar el centro y la razón de esta homotecia y construir las imágenes de los puntos x, y z?
¿Quieres construir los puntos cuyas imágenes son x, y, z?

9. Se te indica que las cuplas distintas (a, b) y (c, d) pertenecen a la homotecia h.
¿Por qué se puede concluir de allí que $a \neq c$?
La homotecia h es la única homotecia que comprende las cuplas (a, b) y (c, d)

Si $b = d$ **entonces** h es la transformación constante $b = d$

Si $b \neq d$ **entonces** $ac \,//\, bd$

Si $a = b$ y $c = d$ **entonces** $h = \mathrm{I}_\pi$

Si $a = b$ y $c \neq d$ **entonces** a es el centro de h y a, c, d están alineados.

Si $c = d$ y $a \neq b$ **entonces** ...

10. ¿Qué puedes decir de la homotecia que comprende las cuplas siguientes.

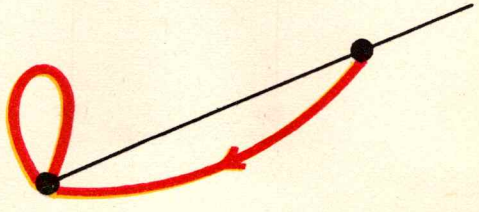


FIG. 176

11. La misma pregunta.

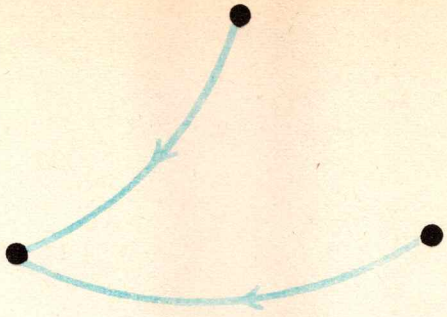


FIG. 177

12. ¿Quieres determinar el centro y la razón de la homotecia que comprende las dos cuplas siguientes?

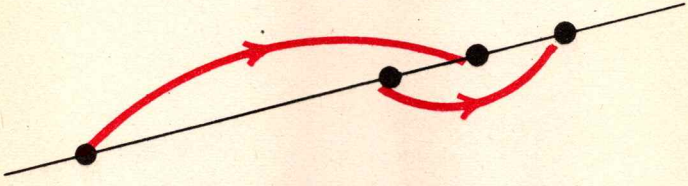


FIG. 178

13. **Si** a, b, c, d designan puntos alineados tales que

$$a \neq c \quad \text{y} \quad (a, b) \nuparrow (c, d),$$

Entonces existe una y sólo una homotecia que comprende (a, b) y (c, d).

14. **Si** $(a, b) \uparrow (c, d)$ y $a \neq c$,

Entonces no existe ninguna homotecia que comprenda (a, b) y (c, d)

... pero existe una y sólo una traslación que comprende esas dos cuplas.

15. ¿Las homotecias y las traslaciones no tienen un aire de familia?

16. **Si** a y b designan puntos fijos distintos de la homotecia h

Entonces ...

17. Para todo $p \in \Pi$: $\rho(s_p) = -1$

18. $\rho(1_\pi) = 1$

19. La homotecia h es constante **ssi** $\rho(h) = 0$

5 — HOMOTECIAS NO CONSTANTES

He aquí una homotecia no constante h de centro c y un punto $a \neq c$

Pongamos $b = h(a)$

Como la homotecia h no es constante, $b \neq c$

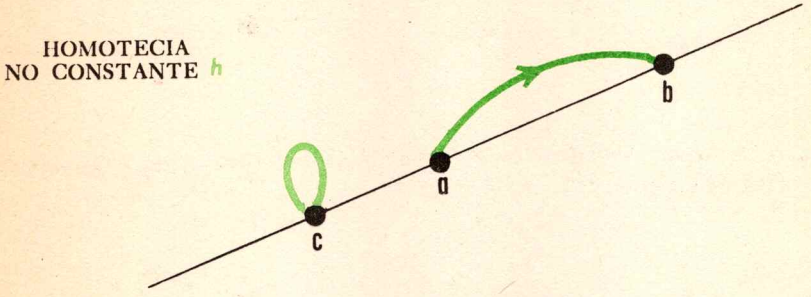
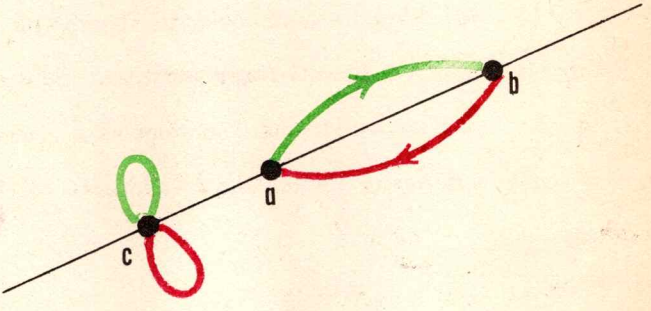


FIG. 179

Los puntos a, b, c están alineados
$a \neq c \neq b$

Aplicamos dos veces la proposición 1 del § 2, p. 180

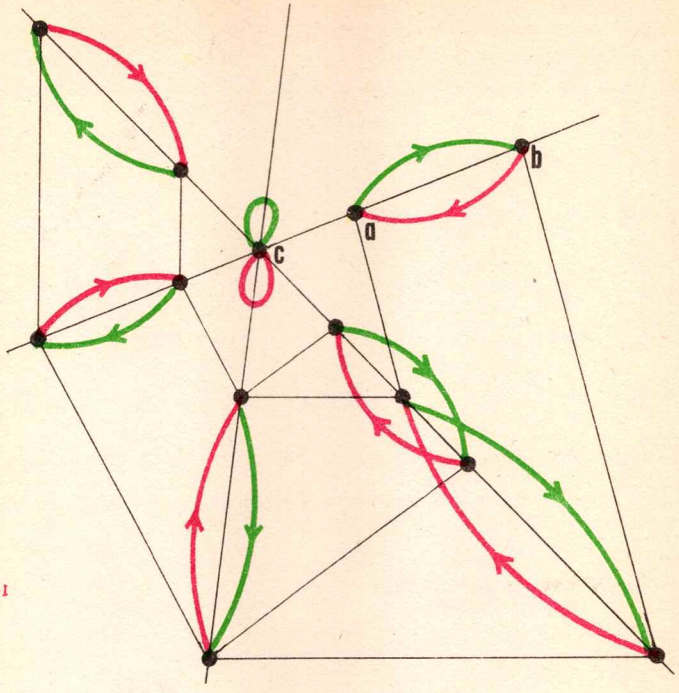
1. La homotecia h es la única homotecia de centro c que aplica a sobre b
2. Existe una y sólo una homotecia k de centro c que aplica b sobre a



ESTOS FRAGMENTOS DE ESQUEMA DEFINEN LAS HOMOTECIAS h Y k

FIG. 180

¿Quieres buscar las imágenes de varios puntos del plano por las homotecias h y k?



h, k = h^{-1}

FIG. 181

Acabamos de establecer que la homotecia k es la recíproca de h.

Nos habíamos dado una homotecia no constante h de centro c.

Acabamos de probar que su recíproca h^{-1} es una homotecia no constante de centro c.

Así h resulta ser una transformación del plano cuya recíproca h^{-1} es una transformación del plano.

Expresamos este hecho diciendo que h es una **permutación** del plano Π.

Es bien claro que las homotecias constantes no son permutaciones del plano.

PROPOSICIÓN 3

1. *La homotecia* **h** *es una permutación de* Π $\iff$ *la homotecia* **h** *no es constante* $\iff$ $\rho(h) \neq 0$

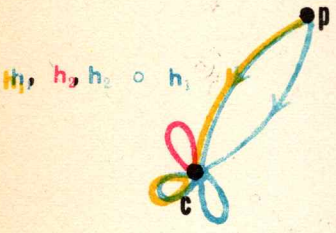
2. **h** *es una homotecia no constante de centro* **c**

ssi

$\boldsymbol{h}^{-1}$ *es una homotecia no constante de centro* **c**

6 — COMPOSICIÓN DE HOMOTECIAS DE IGUAL CENTRO

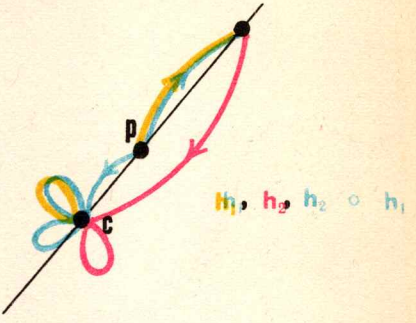
He aquí las homotecias h_1 y h_2 que tienen el mismo centro c
¿Cuál es la compuesta h_2 o h_1?
Examina primero el caso en que una de las homotecias es constante.



Si h_1 es constante

Entonces h_2 o $h_1 = h_1$ es constante

FIG. 182



Si h_2 es constante

Entonces h_2 o $h_1 = h_2$ es constante.

FIG. 183

Si h_1 **y** h_2 son no constantes

Entonces

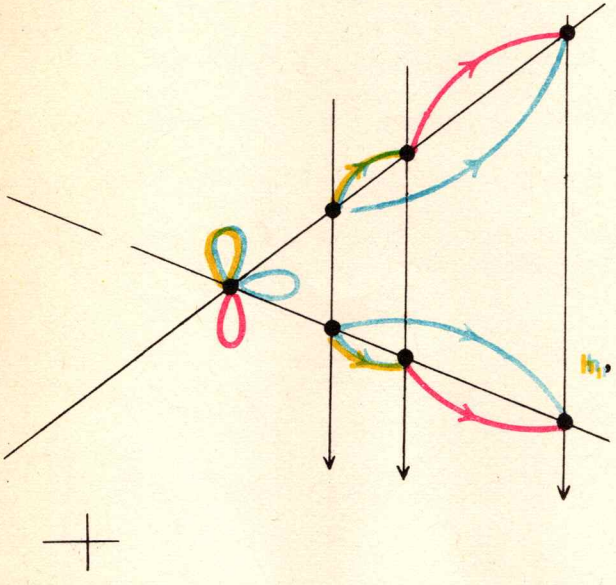


FIG. 184

La compuesta de toda cupla de homotecias no constantes de centro c es una homotecia no constante de centro c

PROPOSICIÓN 4

Si h_1 y h_2 designan **homotecias de centro c**

Entonces $h_2 \circ h_1$ es una **homotecia de centro c**

Además:

$h_2 \circ h_1$ es **constante**

ssi

h_2 **o** h_1 es **constante**

EJERCICIOS

1. **Si** h_1 y h_2 son homotecias que tienen el mismo centro

   Entonces $h_1 \circ h_2$ constante $\iff$ h_1 **o** h_2 constante $\iff$ $h_2 \circ h_1$ constante.

2. **Si** h_1, h_2, h_3, h_4 son homotecias que tiene el mismo centro

   Entonces $h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ h_4$ constante

   $\iff$ h_1 o h_2 o h_3 o h_4 constante

   $\iff$ ...

   ...

   $\iff$ ...

3. La compuesta de una sucesión de n homotecias de igual centro es constante **ssi** por lo menos una de esas homotecias es constante.

4. **Si** cada una de las letras h_1, h_2 designa una homotecia de centro c

   Entonces

   $\rho(h_1 \circ h_2) = o$ $\iff$ $\rho(h_1) = o$ o $\rho(h_2) = o$ $\iff$ $\rho(h_2 \circ h_1) = o$

5. **Si** cada una de las letras h_1, h_2 designa una homotecia de centro c

   Entonces

   $\rho(h_1) = 2$ y $\rho(h_2) = 3$ $\Rightarrow$ $\rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$

   $\rho(h_1) = -2$ y $\rho(h_2) = 3$ $\Rightarrow$ $\rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$

   $\rho(h_1) = -2$ y $\rho(h_2) = -3$ $\Rightarrow$ $\rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$

   $\rho(h_1) = 1$ y $\rho(h_2) = -1$ $\Rightarrow$ $\rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$

   $\rho(h_1) = -2$ y $\rho(h_2) = o$ $\Rightarrow$ $\rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$

7 — EL GRUPO $\mathcal{H}_c$ DE HOMOTECIAS DE CENTRO c Y DE RAZÓN NO NULA

Anotemos $\mathcal{H}_c$ el conjunto de las homotecias de centro c y de razón no nula.

1) **Si** $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_c$ **Entonces** $h_2 \circ h_1 \in \mathcal{H}_c$

2) **Si** $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}_c$ **Entonces** $(h_3 \circ h_2) \circ h_1 = h_3 \circ (h_2 \circ h_1)$

3) $1_\pi \in \mathcal{H}_c$ y para todo $h \in \mathcal{H}_c$: $1_\pi \circ h = h = h \circ 1_\pi$

4) **Si** $h \in \mathcal{H}_c$ **Entonces** $h^{-1} \in \mathcal{H}_c$ y $h^{-1} \circ h = 1_\pi = h \circ h^{-1}$

Como ya sabes, el conjunto de estas proposiciones se resume en la

PROPOSICIÓN 5 — *El conjunto* $\mathcal{H}_c$ *de homotecias no constantes de centro* c *es un grupo para la composición*

Brevemente,

$\mathcal{H}_c$, o **es un grupo**

La **ley** del grupo $\mathcal{H}_c$, es la composición o

El **neutro** del grupo $\mathcal{H}_c$, es la transformación idéntica 1_π

El **inverso** del elemento $h \in \mathcal{H}_c$ es la homotecia recíproca h^{-1}

8 — LAS HOMOTECIAS NO CONSTANTES CONSERVAN EL PARALELISMO

PROPOSICIÓN 6 — *La imagen de una recta* D *por una homotecia no constante es una recta paralela a* D

DEMOSTRACIÓN:

He aquí una homotecia h de centro c y de razón $r \neq 0$ y una recta D

Llamemos x un punto de D distinto de c, y D_1 la paralela a D que comprende $h(x)$

Probemos que $\boxed{hD = D_1}$

1. $\boxed{\text{Si} \quad y \in D \quad \text{Entonces} \quad h(y) \in D_1}$

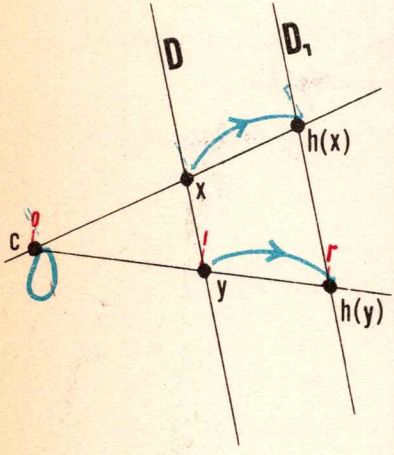


FIG. 185

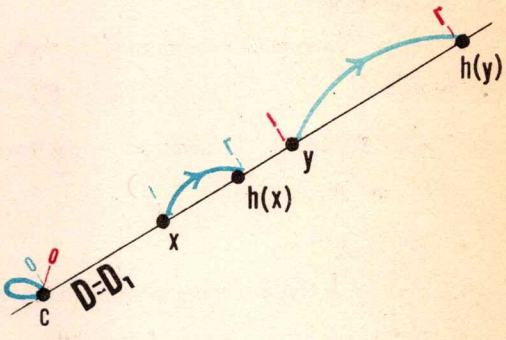


FIG. 186

2. **Si** $z \in D_1$ **Entonces** existe $u \in D$ tal que $h(u) = z$

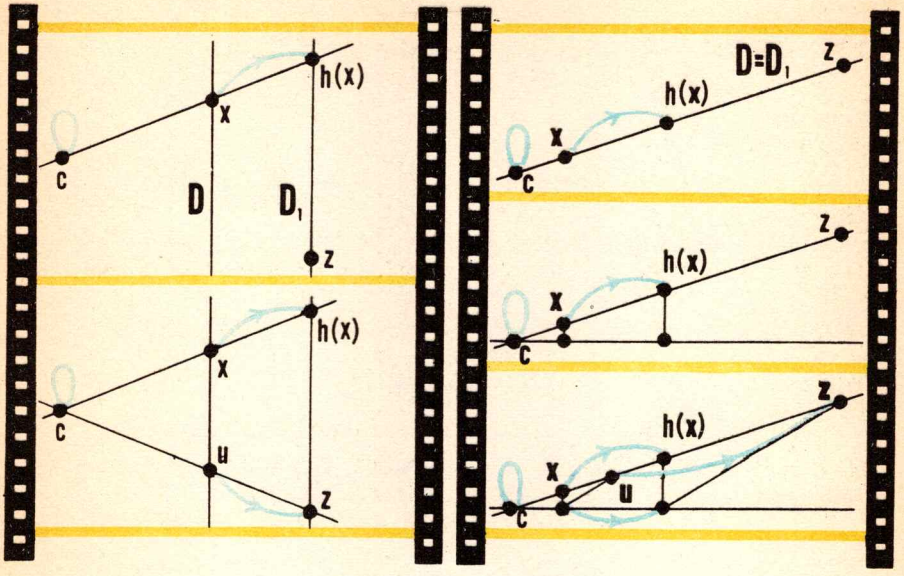


FIG. 187

l.q.q.d.

Hemos probado, en particular, la

PROPOSICIÓN 7

Si *la recta* D *comprende el centro* c *de la homotecia no constante* h

Entonces $D \to D : x \to h(x)$ *es una* **permutación** *de* D

PROPOSICIÓN 8 — *Las homotecias no constantes conservan el paralelismo.*

Dicho de otro modo,

PROPOSICIÓN 8

Si *h designa una homotecia no constante y* $A, B \in \mathfrak{D}$

Entonces $A \parallel B \implies hA \parallel hB$

DEMOSTRACIÓN:

$hA \parallel A \parallel B \parallel hB \implies hA \parallel hB$

prop. 6 prop. 6 transitividad de $\parallel$

l.q.q.d.

9 — IMAGEN DE UN VECTOR POR UNA HOMOTECIA

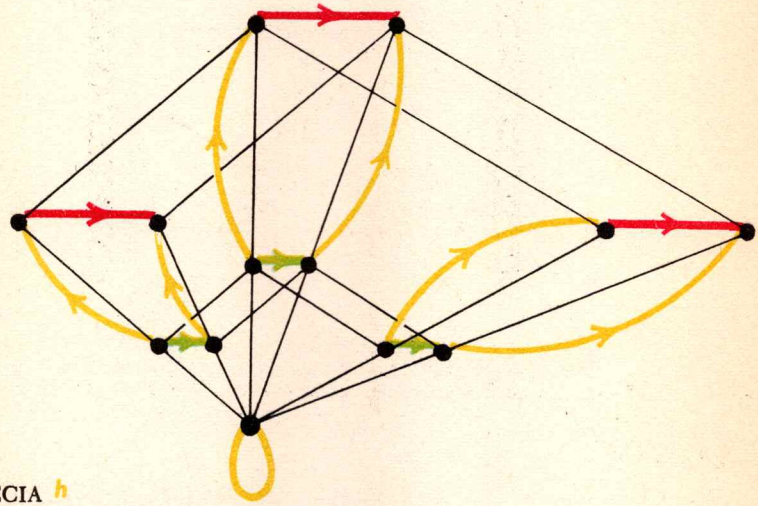
La proposición 8 nos enseña que

Las homotecias no constantes conservan el paralelismo

Además la equipolencia ha sido definida exclusivamente a partir del paralelismo.

Luego

Las homotecias no constantes conservan la equipolencia



LA HOMOTECIA h
CONSERVA LA EQUIPOLENCIA

FIG. 188

Se ve claramente que las homotecias constantes también conservan la equipolencia.

PROPOSICIÓN 9 — **Las homotecias conservan la equipolencia.**

Dicho de otro modo,

PROPOSICIÓN 9 —

Si $a, b, c, d \in \Pi$ *y* h *designa una homotecia*

Entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \Rightarrow \overrightarrow{h(a)\,h(b)} = \overrightarrow{h(c)\,h(d)}$

Si $a, m, b \in \Pi$ y h designa una homotecia

Entonces

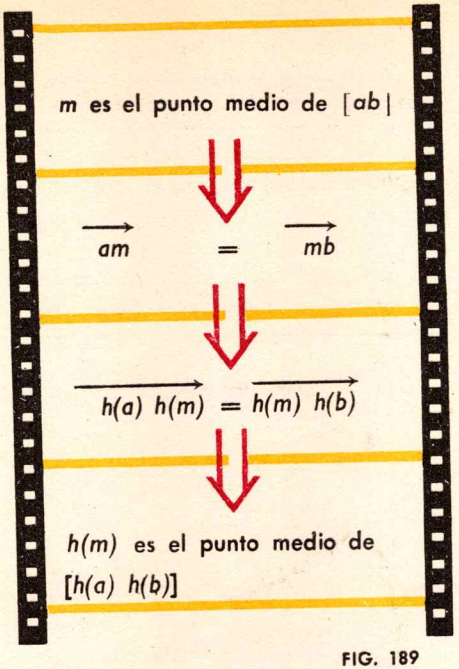


FIG. 189

Luego **Las homotecias conservan el punto medio**

DEFINICIÓN 2

El vector $\overrightarrow{h(a)\,h(b)}$ *se llama* **imagen del vector** $\vec{ab}$ **por la homotecia** h *se anota también* $h(\vec{ab})$

$$h(\vec{ab}) = \overrightarrow{h(a)\,h(b)}$$

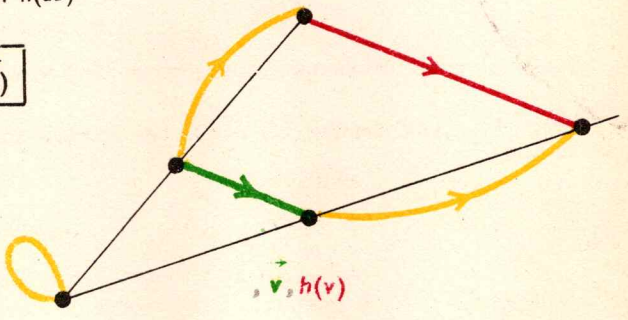
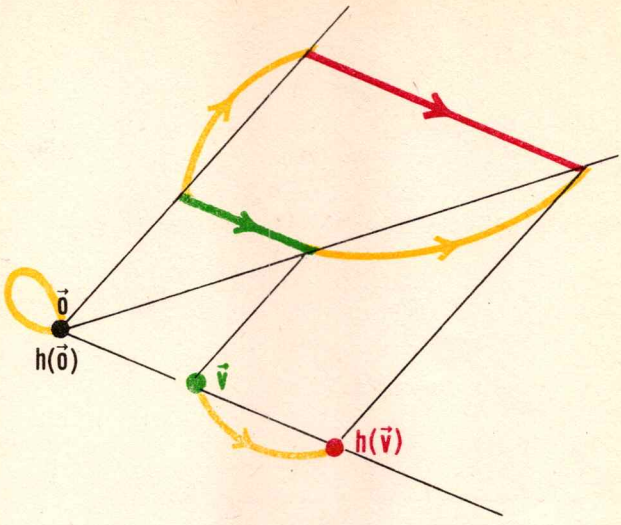


IMAGEN DE UN VECTOR POR UNA HOMOTECIA FIG. 190

En Π_0

Homotecia h de **centro** o



LA IMAGEN POR h DEL PUNTO QUE REPRESENTA A $\vec{v}$

ES EL PUNTO QUE REPRESENTA A $h(\vec{v})$

FIG. 191

PROPOSICIÓN 10

Si *h designa una homotecia y* $\vec{v}, \vec{w}$ *vectores*

Entonces a) $h(\vec{v}) \,//\, \vec{v}$

b) $(\vec{v} = \vec{o} \;\text{ o }\; \rho(h) = 0) \Rightarrow h(\vec{v}) = \vec{o}$

c) $h(\vec{v} + \vec{w}) = h(\vec{v}) + h(\vec{w})$ y $h(-\vec{v}) = -h(\vec{v})$

DEMOSTRACIÓN:

b) **Si** $\vec{v} = \vec{o}$ **Entonces** $\vec{v} = \vec{aa}$ y $h(\vec{v}) = h(\vec{aa}) = \overrightarrow{h(a)\,h(a)} = \vec{o}$

Si $\rho(h) = 0$ **Entonces** h es una transformación constante $h : \Pi \to \Pi : x \to c$

De donde, poniendo $\vec{v} = \vec{ab}$: $h(\vec{v}) = h(\vec{ab}) = \overrightarrow{h(a)\,h(b)} = \vec{cc} = \vec{o}$

a) • **Si** $\vec{v} = \vec{o}$ o $\rho(h) = 0$, **Entonces** $h(\vec{v}) = \vec{o}$ de donde $h(\vec{v}) \,//\, \vec{v}$

(ya que el vector nulo es paralelo a todo vector, C. 1, § 4, p. 9)

• **Si** $\vec{v} \neq \vec{o}$ y $\rho(h) \neq 0$, **Entonces** $h(\vec{v}) \,//\, \vec{v}$ (ver fig. 191)

c) He aquí los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$

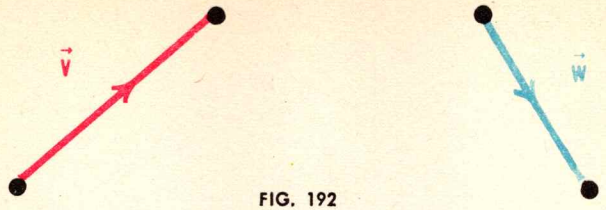


FIG. 192

Es lícito poner $\vec{v} = \vec{pq}$; $\vec{w} = \vec{qr}$ de donde $\vec{v} + \vec{w} = \vec{pr}$

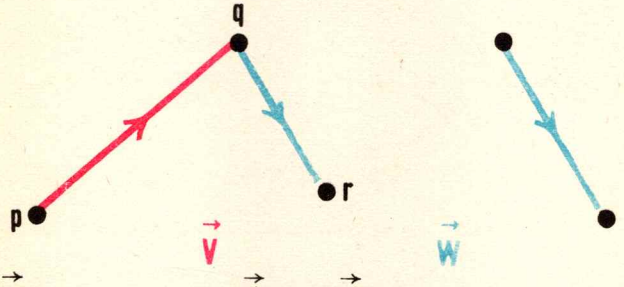


FIG. 193

$$
\begin{aligned}
h(\vec{v}) + h(\vec{w}) &= h(\vec{pq}) + h(\vec{qr}) \\
&= \overrightarrow{h(p)\,h(q)} + \overrightarrow{h(q)\,h(r)} \\
&= \overrightarrow{h(p)\,h(r)} \\
&= h(\vec{pr}) \\
&= h(\vec{v} + \vec{w})
\end{aligned}
$$

$$
h(-\vec{v}) = h(-\vec{pq}) = h(\vec{qp}) = \overrightarrow{h(q)\,h(p)} = -\overrightarrow{h(p)\,h(q)} = -h(\vec{pq}) = -h(\vec{v})
$$

l.q.q.d.

Para todo $\vec{v}, \vec{w} \in V$:

$$
h(\vec{v} - \vec{w}) = h(\vec{v} + (-\vec{w})) = h(\vec{v}) + h(-\vec{w}) = h(\vec{v}) - h(\vec{w})
$$

Las homotecias conservan la adición y la sustracción vectorial

En particular, toda homotecia no constante es una permutación de V que respeta la adición.

Esto se expresa diciendo que

Toda homotecia no constante es un isomorfismo de V, + sobre sí mismo

EJERCICIOS

1. Si $\vec{v}$ designa un vector y h una homotecia

Entonces $h(\vec{v}) = \vec{o} \iff (\vec{v} = \vec{o} \quad o \quad \rho(h) = o)$.

La demostración de $\Leftarrow$ resulta de la proposición 10, *b*

DEMOSTRACIÓN DE $\Rightarrow$:

He aquí una homotecia h y un vector $\vec{v}$ tales que $h(\vec{v}) = \vec{o}$

- **Si** $\rho(h) = o$, **Entonces** la proposición se verifica.
- **Si** $\rho(h) \neq o$, **Entonces** h es una permutación.

Poniendo $\vec{v} = \vec{ab}$, resulta

$\vec{o} = h(\vec{v}) = h(\vec{ab}) = \overrightarrow{h(a)\,h(b)}$ de donde $h(a) = h(b)$

$$a = b$$
$$\vec{v} = \vec{ab} = \vec{o}$$

2. Si $f : V, + \to V, +$ respeta la adición

Entonces f respeta la sustracción y $f(\vec{o}) = \vec{o}$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que f respeta la adición vectorial.

luego para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$: $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

En particular, $f(\vec{o}) = f(\vec{o} + \vec{o}) = f(\vec{o}) + f(\vec{o})$

Luego
$$f(\vec{o}) + f(\vec{o}) = f(\vec{o})$$
$$-f(\vec{o}) + f(\vec{o}) + f(\vec{o}) = -f(\vec{o}) + f(\vec{o})$$
$$f(\vec{o}) = \vec{o}$$

Para todo $\vec{y} \in V$: $\vec{o} = f(\vec{o}) = f(-\vec{y} + \vec{y}) = f(-\vec{y}) + f(\vec{y})$

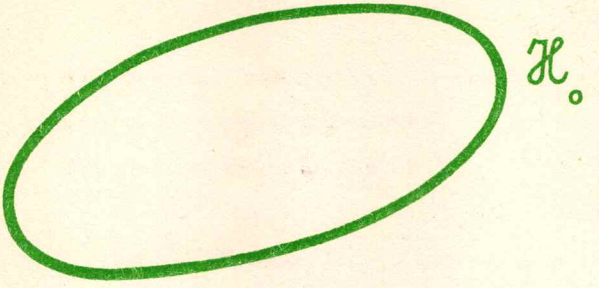
De donde $f(-\vec{y}) + f(\vec{y}) = \vec{o}$ y $f(-\vec{y}) = -f(\vec{y})$

Finalmente, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$:
$$f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x} + (-\vec{y}))$$
$$= f(\vec{x}) + f(-\vec{y})$$
$$= f(\vec{x}) - f(\vec{y})$$

l.q.q.d.

10 — HOMOTECIAS Y ORDEN

— He aquí el conjunto $\mathcal{H}_0$ de homotecias de centro o y de razón no nula:



CONJUNTO $\mathcal{H}_0$
DE HOMOTECIAS DE CENTRO o
Y DE RAZÓN NO NULA
FIG. 194

— ¿Quieres trazar los diagramas para

el conjunto $\mathcal{H}_0^+$ de homotecias de centro o y de razón estrictamente positiva

el conjunto $\mathcal{H}_0^-$ de homotecias de centro o y de razón estrictamente negativa

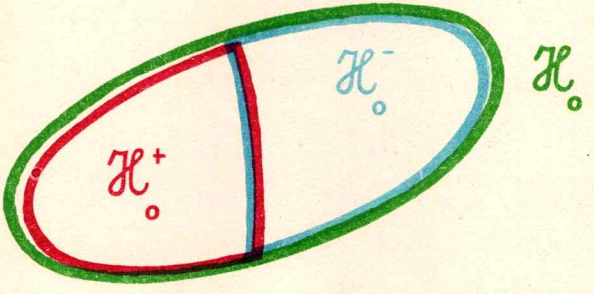


FIG. 195

— He aquí una recta orientada D, $\leqslant$ que comprende o
¿Qué nos enseña la proposición 7?

— Para todo $h \in \mathcal{H}_0$: D, $\leqslant$ → D, $\leqslant$: $x \to h(x)$ es una permutación de D

— Probemos que

Si $\rho(h) > 0$

Entonces la permutación

$$D, \leqslant \;\to\; D, \leqslant : x \to h(x)$$

es **creciente**

Si $\rho(h) < 0$

Entonces la permutación

$$D, \leqslant \;\to\; D, \leqslant : x \to h(x)$$

es **decreciente**

DEMOSTRACIÓN:

1º Establezcamos primero que

$$o < p \in D \implies o < h(p)$$

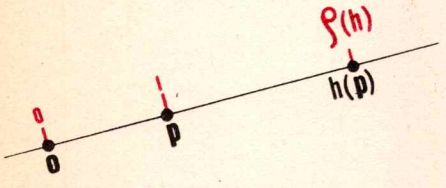


FIG. 196

$$o < p \in D \implies o > h(p)$$

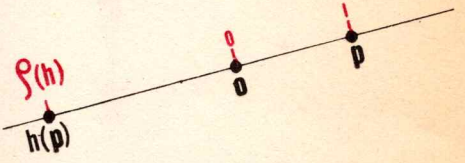
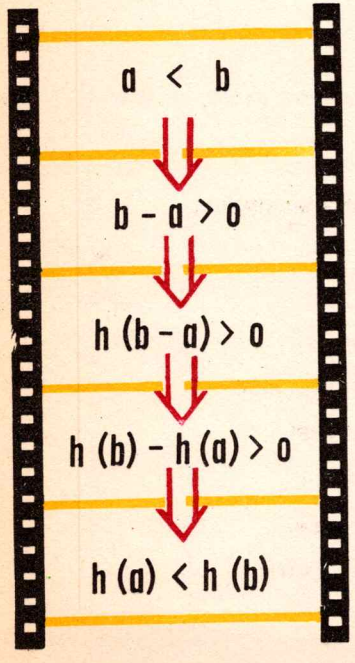


FIG. 197



$D_0, +, \leqslant$
es un grupo ordenado

Nº 1

proposición 10

$D_0, +, \leqslant$
es un grupo ordenado

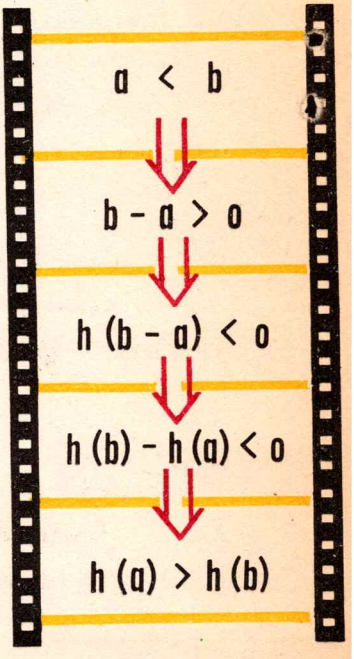


FIG. 198

l.q.q.d.

Acabamos de establecer que

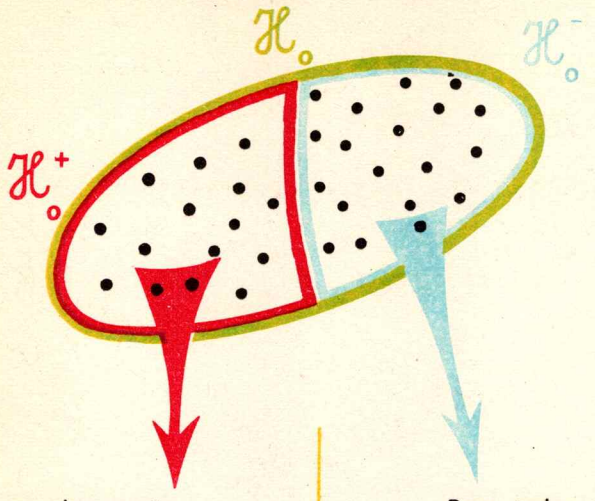


FIG. 199

Para todas estas homotecias:

$$\text{La permutación } D, \leqslant \;\to\; D, \leqslant \;:\; x \to h(x)$$

es **creciente**

Para todas estas homotecias:

es **decreciente**

Hemos pues probado la

PROPOSICIÓN 11

Si la recta orientada $D, \leqslant$ comprende el centro **o** de la homotecia no constante h

Entonces $D, \leqslant \;\to\; D, \leqslant \;:\; x \to h(x)$ es una permutación

creciente	**ssi**	$\rho(h) > 0$
decreciente	**ssi**	$\rho(h) < 0$

DEFINICION — Para toda homotecia no constante h:

$$h \text{ positiva} \iff \rho(h) > 0$$

$$h \text{ negativa} \iff \rho(h) < 0$$

Se comprende de inmediato lo que se entiende por

"las homotecias h_1 y h_2 tienen igual signo"

"las homotecias h_1 y h_2 tienen signos opuestos"

PROPOSICIÓN 12 — La compuesta de dos homotecias de igual centro es positiva

ssi

estas dos homotecias tienen el mismo signo

DEMOSTRACIÓN:

He aquí las homotecias h_1 y h_2 de centro c

D, $\leqslant$ es una recta orientada que comprende c y los puntos x, y

Si

h_1 y h_2 tienen igual signo

Entonces

o bien

h_1 positiva y h_2 positiva

De donde

$$x < y$$
$$\Downarrow$$
$$h_1(x) < h_1(y)$$
$$\Downarrow$$
$$h_2(h_1(x)) < h_2(h_1(y))$$
$$\Downarrow$$
$$(h_2 o h_1)(x) < (h_2 o h_1)(y)$$

o bien

h_1 negativa y h_2 negativa

De donde

$$x < y$$
$$\Downarrow$$
$$h_1(x) > h_1(y)$$
$$\Downarrow$$
$$h_2(h_1(x)) < h_2(h_1(y))$$
$$\Downarrow$$
$$(h_2 o h_1)(x) < (h_2 o h_1)(y)$$

Luego

$$x < y \Longrightarrow (h_2 \circ h_1)(x) < (h_2 \circ h_1)(y)$$

$h_2 \circ h_1$ es positiva

Si

h_1 y h_2 *tienen signos opuestos*

Entonces

o bien

h_1 positiva y h_2 negativa

De donde

$$x < y$$
$$\Downarrow$$
$$h_1(x) < h_1(y)$$
$$\Downarrow$$
$$h_2(h_1(x)) > h_2(h_1(y))$$
$$\Downarrow$$
$$(h_2 o h_1)(x) > (h_2 o h_1)(y)$$

o bien

h_1 negativa y h_2 positiva

De donde

$$x < y$$
$$\Downarrow$$
$$h_1(x) > h_1(y)$$
$$\Downarrow$$
$$h_2(h_1(x)) > h_2(h_1(y))$$
$$\Downarrow$$
$$(h_2 o h_1)(x) > (h_2 o h_1)(y)$$

Luego

$$x < y \Longrightarrow (h_2 \circ h_1)(x) > (h_2 \circ h_1)(y)$$

$h_2 \circ h_1$ es negativa

l.q.q.d.

EJERCICIOS

1. Para todo punto $c \in \Pi$,
la transformación idéntica 1_π es una homotecia de centro c y de razón 1 (por lo tanto estrictamente positiva).

2. La razón de toda homotecia no constante tiene el mismo signo que la razón de la homotecia recíproca.

3. El conjunto $\mathcal{H}_c^+$ de homotecias de centro c y de razón estrictamente positiva es un sub-grupo de $\mathcal{H}_c$, o

11 — HOMOTECIAS Y ABSCISAS

He aquí una homotecia no constante h de centro c y una recta graduada D_{01} que comprende el punto c marcado con 0

La recta graduada D_{01} está naturalmente provista del orden total $\leqslant$ definido por $0 < 1$

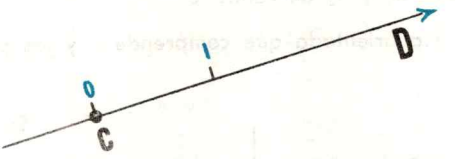


FIG. 200

Introduzcamos una segunda graduación (roja) de la recta D marcando 0 en c y 1 en el punto de abscisa $\rho(h)$

La recta graduada D_{01} está naturalmente provista del orden total $\leqslant$ definido por $0 < 1$

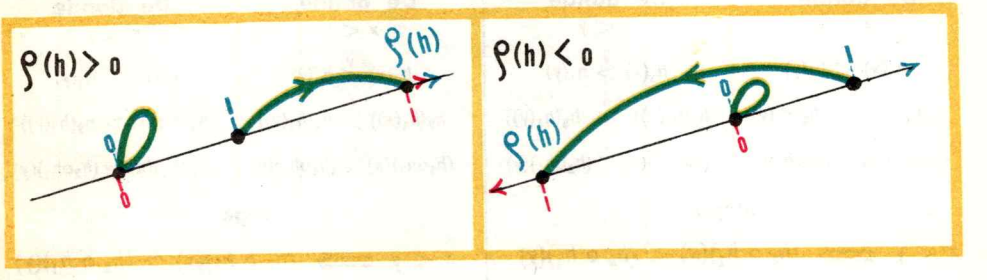


FIG. 201

Si $\rho(h) > 0$
Entonces

$D, \leqslant \rightarrow D, \leqslant : x \rightarrow h(x)$ **creciente**

y

$\leqslant$ y $\leqslant$ designan el **mismo** orden

Luego $D, \leqslant \rightarrow D, \leqslant : x \rightarrow h(x)$ creciente

Si $\rho(h) < 0$
Entonces

$D, \leqslant \rightarrow D, \leqslant : x \rightarrow h(x)$ **decreciente**

y

$\leqslant$ y $\leqslant$ designan órdenes recíprocos.

Luego $D, \leqslant \rightarrow D, \leqslant : x \rightarrow h(x)$ creciente

Así, en todos los casos, la permutación

$D, \leqslant \rightarrow D, \leqslant : x \rightarrow h(x)$ es **creciente**

La permutación $D, \leqslant \rightarrow D, \leqslant : x \rightarrow h(x)$

- aplica la referencia $(0, 1)$ sobre la referencia $(0, 1)$
- conserva los puntos medios (proposición 9)
- es creciente

Por lo tanto, en virtud del teorema 2 (C. 8, § 3, p. 164)
la homotecia h aplica todo punto de abscisa r con respecto a D_{01}
sobre el punto de abscisa r con respecto a D_{01}

PROPOSICIÓN 13

Si h es una homotecia no constante de centro c
y D_{01} una recta graduada que comprende el punto c marcado 0,

Entonces la homotecia h aplica el punto de abscisa r con respecto a la referencia dada
sobre el punto de abscisa r con respecto a la referencia imagen

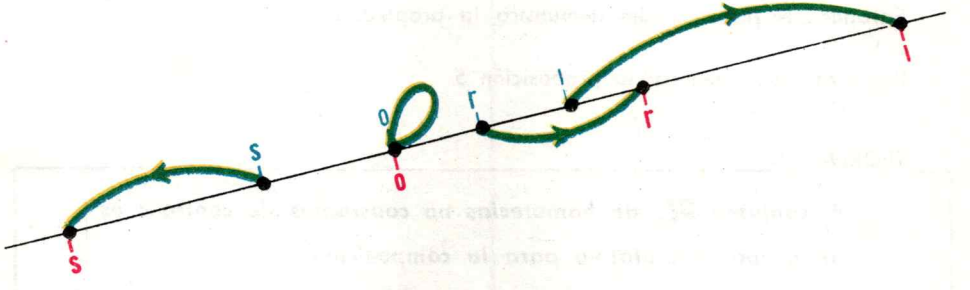


FIG. 202

12 — EL GRUPO CONMUTATIVO $\mathcal{H}_c$ DE HOMOTECIAS NO CONSTANTES DE CENTRO c

PROPOSICIÓN 14

Si h_1 y h_2 son homotecias de centro c

Entonces $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$

DEMOSTRACIÓN:

La proposición a ha sido demostrada cuando por lo menos una de las homotecias es constante (proposición 4).

Supongamos entonces $\rho(h_1) = r_1 \neq 0$, $\rho(h_2) = r_2 \neq 0$

He aquí $x \in \Pi$

Debemos probar que $h_1 (h_2 (x)) = h_2 (h_1 (x))$

- **Si** $x = c$

  Entonces $h_1 (h_2 (c)) = h_1 (c) = c = h_2 (c) = h_2 (h_1 (c))$

- **Si** $x \neq c$

  Entonces el próximo film demuestra la propiedad.

Podemos, pues, mejorar la proposición 5.

TEOREMA 1

El conjunto $\mathcal{H}_c$ de homotecias no constantes de centro c es un grupo conmutativo para la composición.

Brevemente,

$\mathcal{H}_c$, o es un GRUPO CONMUTATIVO

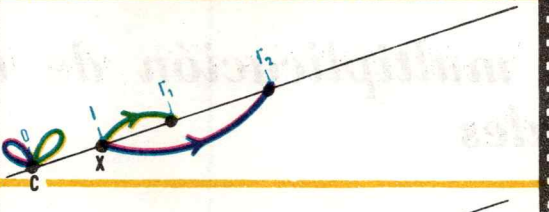
Si

h_1 es la homotecia de centro c y de razón $r_1 \neq 0$

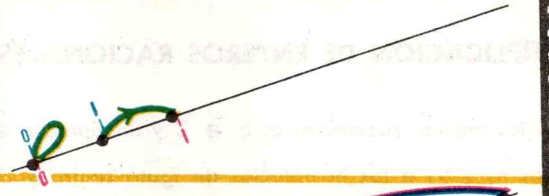
h_2 es la homotecia de centro c y de razón $r_2 \neq 0$

$\rho(h_1) = r_1$

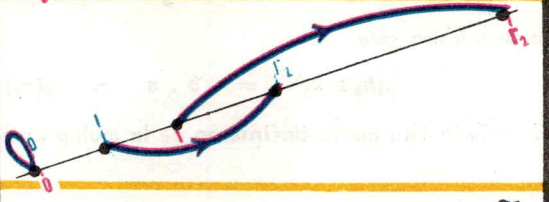
$\rho(h_2) = r_2$



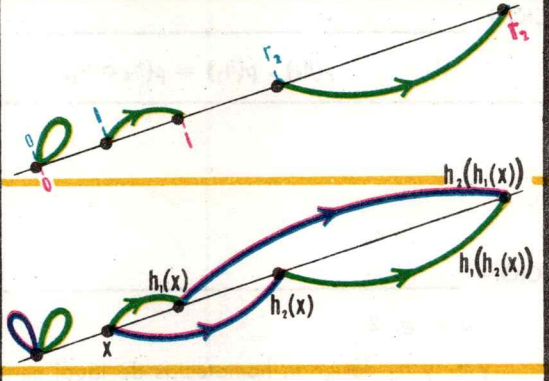
h_1 aplica $(0,1)$ sobre $(0,1)$



Definición de homotecias



Proposición 13



Entonces

$$h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$$

FIG. 203

10

La multiplicación de números reales

1 — MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS RACIONALES

He aquí los enteros racionales $a, b \in \mathbf{Z}$ y un punto $o \in \Pi$

Llamemos h_1 y h_2 a las homotecias de igual centro y de razones a y b.

Este film demuestra que

$$\rho(h_2 \circ h_1) \quad = \quad b \cdot a \quad = \quad \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$$

De donde resulta esta nueva **definición** de la multiplicación de enteros racionales.

DEFINICIÓN

$$\rho(h_2) \cdot \rho(h_1) = \rho(h_2 \circ h_1)$$

o aún

DEFINICIÓN

Si $a, b \in \mathbf{Z}$

y h_1 y h_2 designan homotecias de igual centro tales que

$a = \rho(h_1)$ y $b = \rho(h_2)$

Entonces $b \cdot a = \rho(h_2 \circ h_1)$

En § 2 definiremos la multiplicación de números reales generalizando esta nueva definición de la multiplicación de enteros racionales.

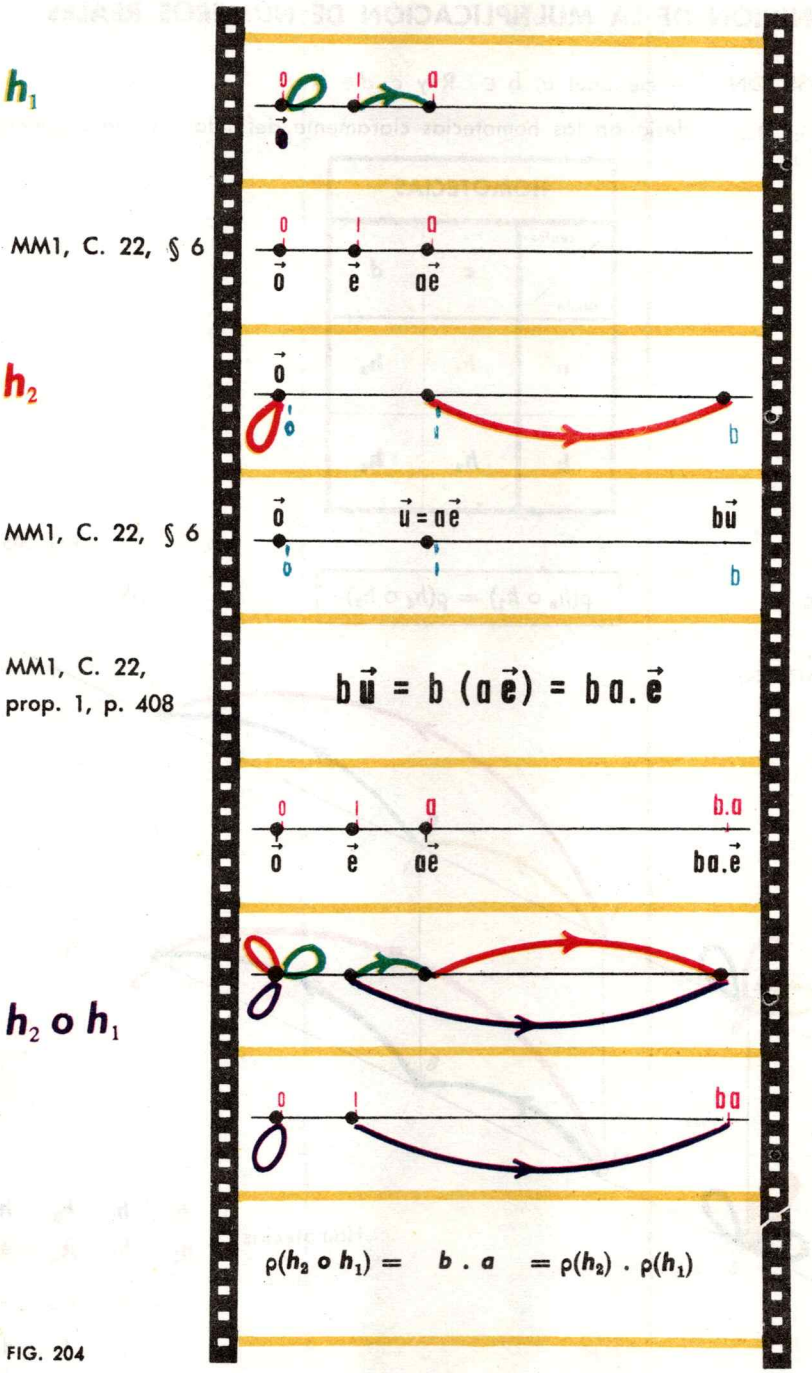

h_1
MM1, C. 22, § 6
h_2
MM1, C. 22, § 6
MM1, C. 22, prop. 1, p. 408
$b\vec{u} = b(a\vec{e}) = ba.\vec{e}$
$h_2 \circ h_1$
$\rho(h_2 \circ h_1) = b \cdot a = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$

FIG. 204

2 — DEFINICIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

PROPOSICIÓN 1 — He aquí $a, b \in \mathbf{R}$ y $c, d \in \Pi$

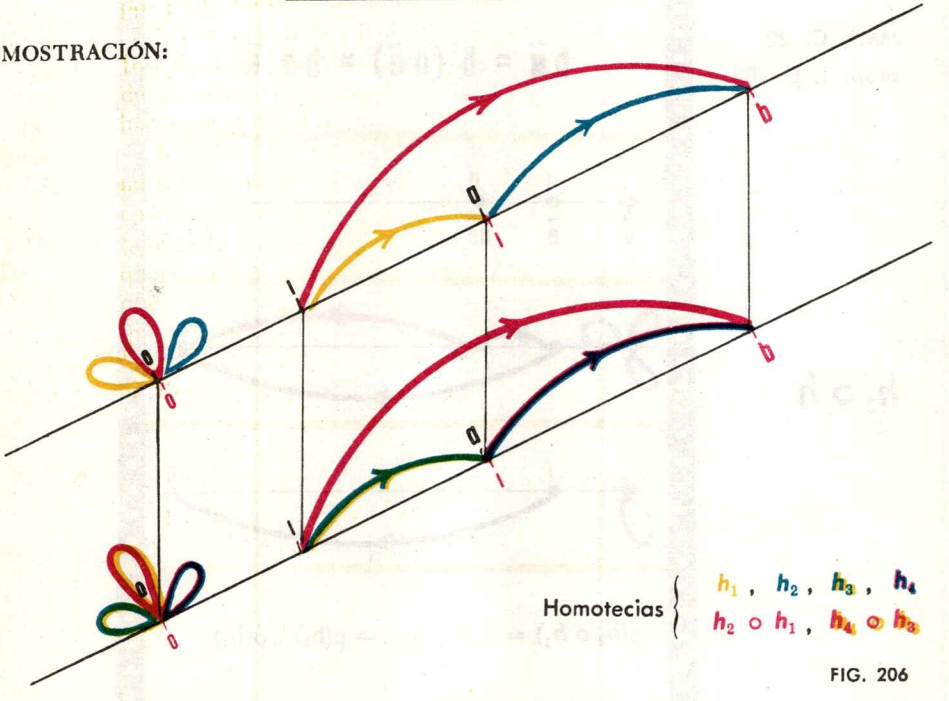
Si h_1, h_2, h_3, h_4 designan las homotecias claramente definidas por la siguiente tabla

HOMOTECIAS		
centro / razón	c	d
a	h_1	h_3
b	h_2	h_4

FIG. 205

Entonces $\boxed{\rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_4 \circ h_3)}$

DEMOSTRACIÓN:



Homotecias $\left\{ \begin{matrix} h_1\ ,\ h_2\ ,\ h_3\ ,\ h_4 \\ h_2 \circ h_1\ ,\ h_4 \circ h_3 \end{matrix} \right.$

FIG. 206

. . . l.q.q.d.

Brevemente:

PROPOSICIÓN 1

	HOMOTECIAS		
	centro / razón	c	d
Si	a	h_1	h_3
	b	h_2	h_4
Entonces		$h_2 \circ h_1$	$h_4 \circ h_3$

tienen igual razón

FIG. 207

Se define LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES ***diciendo que el producto*** $b.\ a$ ***es la razón común de las homotecias*** $h_2 \circ h_1$ *y* $h_4 \circ h_3$

En virtud de § 1,
la multiplicación de números reales prolonga la multiplicación de enteros racionales.

DEFINICIÓN

Si $a, b \in \mathbf{R}$

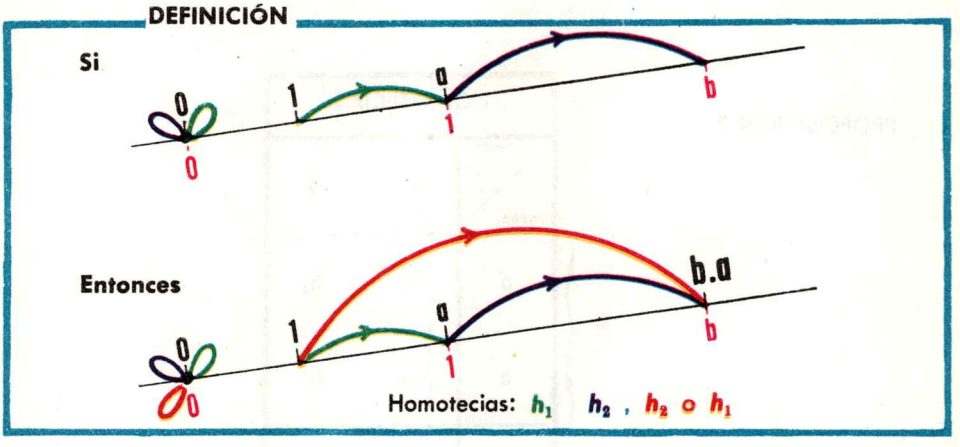
y h_1 *y* h_2 *designan homotecias*

de igual centro tales que

$a = \rho(h_1)$ y $b = \rho(h_2)$

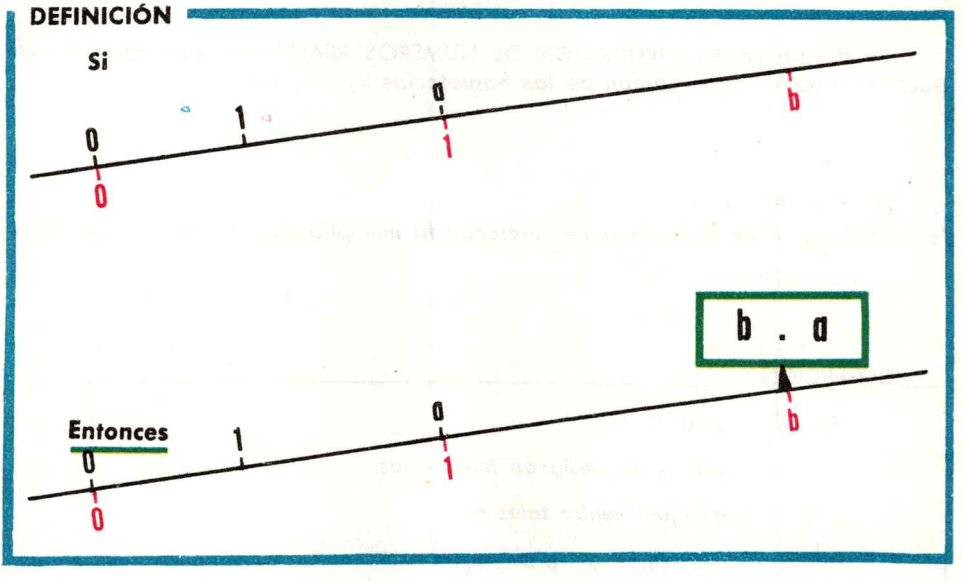
Entonces $b \cdot a = \rho(h_2 \circ h_1)$

Gráficamente:



LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES FIG. 208

O, liberándonos de las homotecias,



LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES FIG. 209

La definición de la multiplicación de los reales se enuncia también

DEFINICIÓN

Si h_1 y h_2 *designan homotecias de igual centro*

Entonces $\rho(h_2) \cdot \rho(h_1) = \rho(h_2 \circ h_1)$

o también

DEFINICIÓN

La razón de la compuesta de dos homotecias de igual centro es igual al producto de sus razones.

Este parágrafo se resume en la tabla y dibujo siguientes

HOMOTECIAS

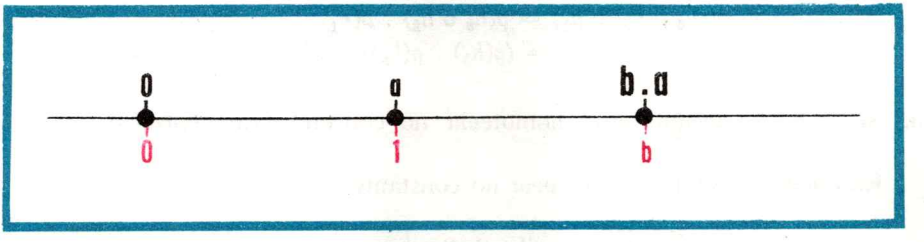
centro / razón t	c	d
a	h_1	h_3
b	h_2	h_4
$b.a$	$h_2 \circ h_1$	$h_4 \circ h_3$

Si (filas a y b)

Entonces (fila $b.a$)

FIG. 210

DEFINICIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES



DEFINICIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

FIG. 211

La multiplicación de números reales es una aplicación

$$R \times R \to R : (x, y) \to x \cdot y$$

El número real $x \cdot y$ se llama **producto** de la cupla (x, y).
Se dice, además, que x e y son los **factores** de este producto.
El producto $x \cdot y$ se anota a menudo de la manera más simple xy

EJERCICIOS

1. Si h_1, h_2 designan homotecias de centro c,

Entonces $\rho(h_1) \cdot \rho(h_2) = \rho(h_1 \circ h_2)$
$= \rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$.

2. Si $h_1, h_2, h_3,$ designan homotecias de centro c

Entonces a) $h_2 \circ h_1$, $h_3 \circ h_2$,
$h_3 \circ (h_2 \circ h_1) = (h_3 \circ h_2) \circ h_1$
son homotecias de centro c

b) $\rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$
$\rho(h_3 \circ h_2) = \rho(h_3) \cdot \rho(h_2)$
$\rho(h_3 \circ (h_2 \circ h_1)) = \rho(h_3) \cdot \rho(h_2 \circ h_1)$
$= \rho(h_3) \cdot (\rho(h_2) \cdot \rho(h_1))$
$= \rho((h_3 \circ h_2) \circ h_1) = \rho(h_3 \circ h_2) \cdot \rho(h_1)$
$= (\rho(h_3) \cdot \rho(h_2)) \cdot \rho(h_1)$

3. Si h designa una homotecia no constante de centro c,

Entonces h^{-1} es una homotecia no constante de centro c

y $\rho(h) \cdot \rho(h^{-1}) = \rho(h \circ h^{-1}) = \rho(1_\pi) = 1$
$\rho(h^{-1}) \cdot \rho(h) = \rho(h^{-1} \circ h) = \rho(1_\pi) = 1$

4.

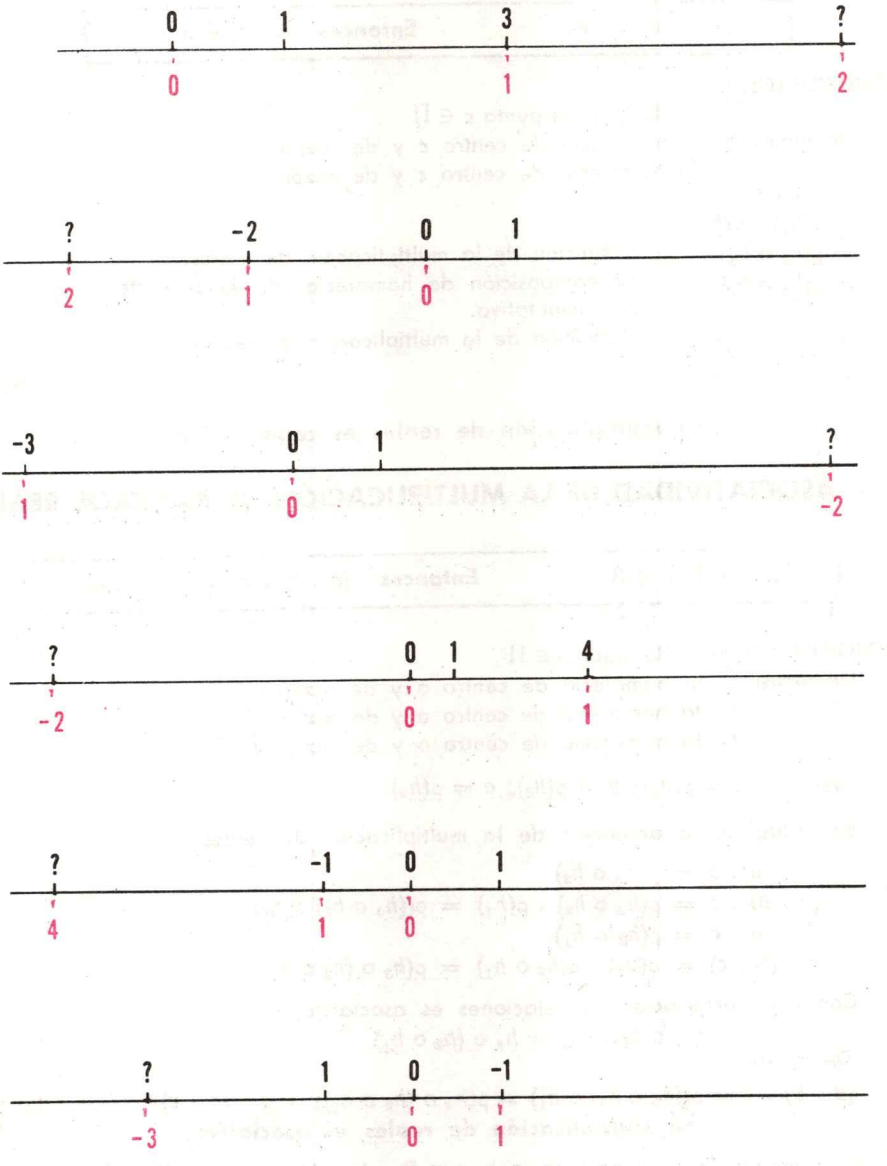


FIG. 212

3 — CONMUTATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

Si $a, b \in R$,	Entonces $a \cdot b = b \cdot a$

DEMOSTRACIÓN:

He aquí un punto $c \in \Pi$

Llamemos h_1 la homotecia de centro c y de razón a

h_2 la homotecia de centro c y de razón b

$b \cdot a$

$= \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$

$= \rho(h_2 \circ h_1)$ Definición de la multiplicación de reales.

$= \rho(h_1 \circ h_2)$ La composición de homotecias de igual centro es conmutativa.

$= \rho(h_1) \cdot \rho(h_2)$ Definición de la multiplicación de reales.

$= a \cdot b$ l.q.q.d.

La multiplicación de reales es conmutativa.

4 — ASOCIATIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

Si $a, b, c \in R$	Entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

DEMOSTRACIÓN: He aquí $o \in \Pi$

Llamemos h_1 la homotecia de centro o y de razón c

h_2 la homotecia de centro o y de razón b

h_3 la homotecia de centro o y de razón a

Luego $c = \rho(h_1)$; $b = \rho(h_2)$; $a = \rho(h_3)$

En virtud de la definición de la multiplicación de reales,

$$a \cdot b = \rho(h_3 \circ h_2)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = \rho(h_3 \circ h_2) \cdot \rho(h_1) = \rho((h_3 \circ h_2) \circ h_1)$$
$$b \cdot c = \rho(h_2 \circ h_1)$$
$$a \cdot (b \cdot c) = \rho(h_3) \cdot \rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_3 \circ (h_2 \circ h_1))$$

Como la composición de relaciones es asociativa,

$$(h_3 \circ h_2) \circ h_1 = h_3 \circ (h_2 \circ h_1)$$

De donde

$$(a \cdot b) \cdot c = \rho((h_3 \circ h_2) \circ h_1) = \rho(h_3 \circ (h_2 \circ h_1)) = a \cdot (b \cdot c)$$ l.q.q.d.

La multiplicación de reales es asociativa.

Convención: Como para todo $a, b, c \in \mathbf{R}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, podemos dispensarnos de poner los paréntesis y escribir

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Lo mismo vale para todo producto de más de tres **factores.**

5 — MULTIPLICACIÓN POR 0 Y POR 1

a) $\boxed{\text{Para todo real } r : 0 \cdot r = 0 = r \cdot 0}$

DEMOSTRACIÓN:

Como la multiplicación de reales es conmutativa, basta probar que

Para todo real r : $0 \cdot r = 0$

He aquí $c \in \Pi$

h_1 es la homotecia de centro c y de razón r

h_2 es la homotecia de centro c y de razón 0

es decir, la transformación constante: $\Pi \to \Pi : x \to c$

Luego $h_2 \circ h_1 = h_2$

y $0 \cdot r = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1) = \rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_2) = 0$

l.q.q.d.

El número 0 es un absorbente para la multiplicación de números reales.

b) $\boxed{\text{Para todo real } r : 1 \cdot r = r = r \cdot 1}$

DEMOSTRACIÓN:

Como la multiplicación de reales es conmutativa, basta probar que

Para todo $r \in \mathbf{R}$: $1 \cdot r = r$

Designemos con h una homotecia de razón r

Luego $r = \rho(h)$ y ... $1 = \rho(1_\pi)$

Como h y 1_π son homotecias de igual centro, la definición de la multiplicade números reales implica.

$1 \cdot r = \rho(1_\pi) \cdot \rho(h) = \rho(1_\pi \circ h) = \rho(h) = r$ l.q.q.d.

El número 1 es neutro para la multiplicación de reales.

6 — EL GRUPO CONMUTATIVO $\mathbf{R}_0, \cdot$

Recordemos que $\mathbf{R}_0$ designa el conjunto de reales no nulos

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

1. **Si** $a, b \in \mathbf{R}_0$, **Entonces** $a \cdot b \in \mathbf{R}_0$

DEMOSTRACIÓN:

He aquí $c \in \Pi$

h_1 es la homotecia de centro c y de razón b

h_2 es la homotecia de centro c y de razón a

Como $a \neq 0 \neq b$,

las homotecias h_1 y h_2 son no constantes (C. 9, § 5, prop. 3, p. 189)

la compuesta $h_2 \circ h_1$ es no constante (C. 9, § 6, prop. 4, p. 191)

de donde $\rho(h_2 \circ h_1) \neq 0$.

En virtud de la definición de la multiplicación de reales,

$$a \cdot b = \rho(h_2 \circ h_1) \neq 0$$

l.q.q.d.

Como hemos probado que 0 es un absorbente para la multiplicación de reales,

Para todo $a, b \in \mathbf{R}$: $a \cdot b = 0 \iff (a = 0 \quad o \quad b = 0)$

2. **Si** $a, b, c \in \mathbf{R}_0$, **Entonces** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(Ver § 4)

3. $1 \in \mathbf{R}_0$ y para todo $r \in \mathbf{R}_0$: $1 \cdot r = r = r \cdot 1$

(Ver § 5, *b*)

4. He aquí $r \in \mathbf{R}_0$, $c \in \Pi$ h es la homotecia de centro c y de razón r

Como $r \neq 0$, la homotecia h es no constante
y su recíproca h^{-1} es una homotecia no constante de centro c,
pondremos $r^{-1} = \rho(h^{-1})$

En virtud de la definición de la multiplicación de reales,

$$r^{-1} \cdot r = \rho(h^{-1}) \cdot \rho(h) = \rho(h^{-1} \circ h) = \rho(1_\pi) = 1$$

Si $r \in R_o$, Entonces $r^{-1} \in R_o$ y $r \cdot r^{-1} = 1 = r^{-1} \cdot r$

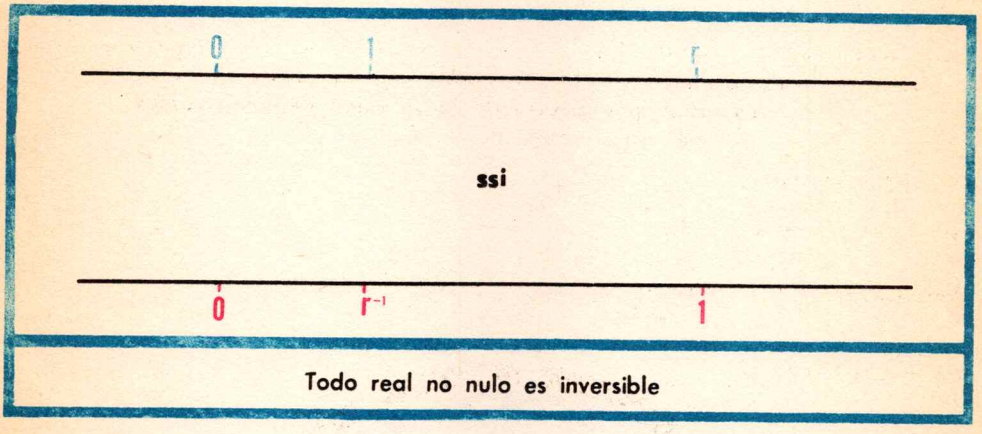


FIG. 213

5. **Si $a, b \in R_o$, Entonces $a \cdot b = b \cdot a$**

Ver § 3

Como ya sabes, las cinco proposiciones encuadradas más arriba se resumen diciendo que

R_o, . es un GRUPO CONMUTATIVO

En un grupo, todo elemento posee uno y sólo un simétrico.

Luego el número r^{-1} no depende del punto c que sirvió para introducirlo.

El simétrico r^{-1} de r (con respecto a la multiplicación) se llama también **inverso** de r.

PROPOSICIÓN 1

Si $a, b, \ldots, k \in \mathbf{R}_o$,

Entonces $\boxed{(a \cdot b \cdot \ldots \cdot k)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \ldots \cdot k^{-1}}$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} & ab \ldots hk \cdot a^{-1}b^{-1} \ldots h^{-1}k^{-1} \\ = \; & aa^{-1} \cdot bb^{-1} \cdot \ldots \cdot hh^{-1} \cdot kk^{-1} \qquad \text{(asociatividad y conmutatividad)} \\ = \; & 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

El inverso del producto de una sucesión finita de reales no nulos es igual al producto de la sucesión de los inversos

PROPOSICIÓN 2

Si $a, b \in \mathbf{R}$ **y** $r \in \mathbf{R}_o$,

Entonces $\boxed{ra = b \iff a = r^{-1}b}$

DEMOSTRACIÓN:

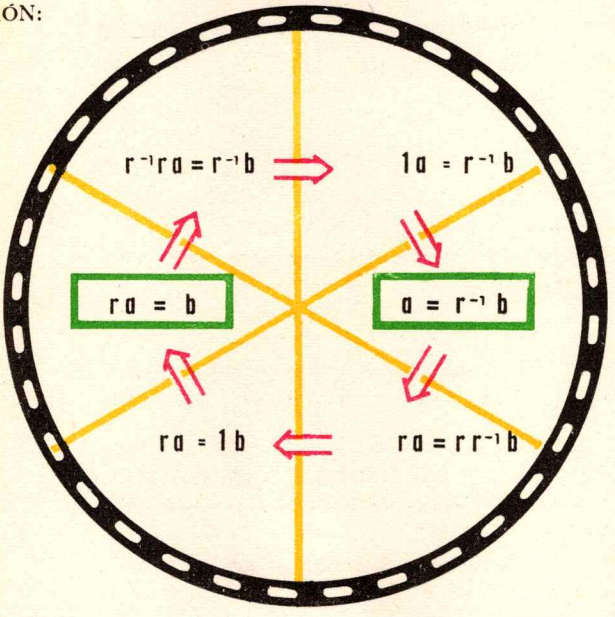


FIG. 214

Luego $\boxed{ra = b} \iff \boxed{a = r^{-1}b}$ l.q.q.d.

Problema

Sobre D_{01} *se te da el punto de abscisa* r. *Construye el punto de abscisa* r^{-1}.

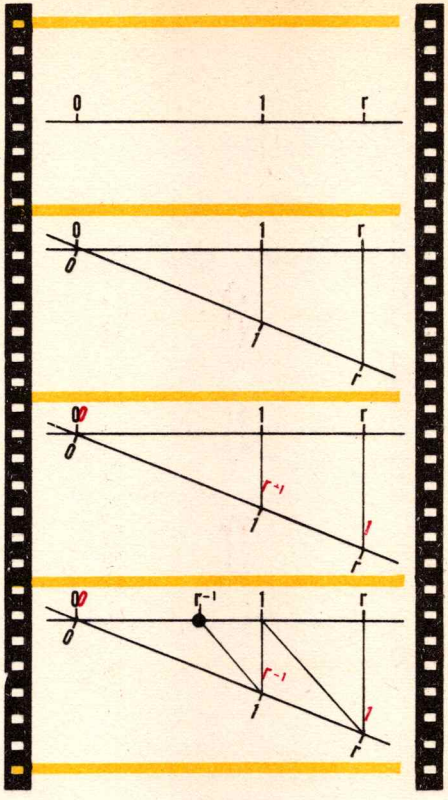


FIG. 215

7 — EL ISOMORFISMO $\mathcal{H}_c$ o $\rightarrow$ R_o, .

He aquí un punto $c \in \Pi$

Para todo $r \in R$, la aplicación

$$\mathcal{H}_c \rightarrow R_o \quad : \quad h \rightarrow \rho(h)$$

es biyectiva.

En virtud de la definición de la mulitiplicación de reales.

$$\rho(h_2 \circ h_1) = \rho(h_2) \cdot \rho(h_1)$$

para todo $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_c$

Como ya sabes, estos resultados se expresan diciendo que

$\mathcal{H}_c$ o $\rightarrow$ R_o, . : $h \rightarrow \rho(h)$ es un ISOMORFISMO

8 — SIGNO DEL PRODUCTO DE DOS REALES

El producto de dos reales no nulos es positivo

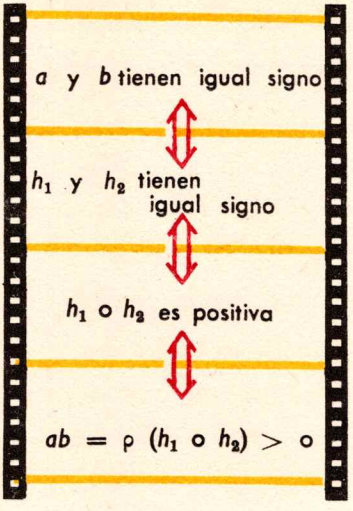
ssi

dichos reales tienen el mismo signo

DEMOSTRACIÓN:

He aquí los reales no nulos a y b

h_1 y h_2 son homotecias de igual centro y de razón a y b



C. 9, § 10, prop. 12, p. 203

l.q.q.d.

FIG. 216

Para todo $r \in \mathbf{R}_0$: $r \cdot r^{-1} = 1 > 0$ de donde

r y r^{-1} tienen el mismo signo

9 — EL GRUPO DE REALES ESTRICTAMENTE POSITIVOS

Si $x, y \in \mathbf{R}_0^+$, **Entonces** $x.y \in \mathbf{R}_0^+$

$1 \in \mathbf{R}_0^+$

Si $x \in \mathbf{R}_0^+$, **Entonces** $x^{-1} \in \mathbf{R}_0^+$

Resulta de inmediato que

$\mathbf{R}_0^+$ es un sub-grupo del grupo conmutativo $\mathbf{R}_0$, .

EJERCICIOS

Verifica que todas las propiedades exigidas para un grupo conmutativo se verifican para $\mathbf{R}_0^+$, .

10 — FRACCIONES

DEFINICIÓN

Si *a es un real y* **b** *un real no nulo*

Entonces

$$a/b = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

El **término** *a/b se llama* **fracción** *de* **numerador** ***a*** *y de* ***denominador b.***

El número a/b se llama **razón** *entre* ***a*** *y* ***b***

Convención:

Cada vez que escribamos una fracción,
supondremos implícitamente que el denominador es no nulo.

***

Ya estás familiarizado con las reglas de cálculo de fracciones cuyo numerador y denominador son enteros naturales. Demostraremos aquí y en el C. 12 que estas reglas continúan siendo válidas para las fracciones cuyo numerador y denominador son números reales.

***

Para todo $r \in \mathbf{R}_o$

$$r^{-1} = 1 \cdot r^{-1} = 1/r = \frac{1}{r}$$
$$r/r = r \cdot r^{-1} = 1 \qquad (1)$$

***

— Calcula $(a/b) \cdot (c/d)$ o $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ (donde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$)

— $(a/b) \cdot (c/d)$

$= ab^{-1} \cdot cd^{-1}$ Definición de fracciones.

$= ac \cdot b^{-1}d^{-1}$ Asociatividad y conmutatividad de la multiplicación de reales.

$= ac \cdot (bd)^{-1}$ El inverso de un producto igual al producto de los inversos.

$= (ac)/(bd) = \frac{ac}{bd}$ Definición de fracciones.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad (2)$$

— Calcula am/bm o $\dfrac{am}{bm}$ (donde $a, b, m \in \mathbf{R}$)

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}} \qquad (3)$$

***

Si $a, c \in \mathbf{R}$ y $b, d \in \mathbf{R}_o$,

Entonces $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc}$ (4)

DEMOSTRACIÓN:

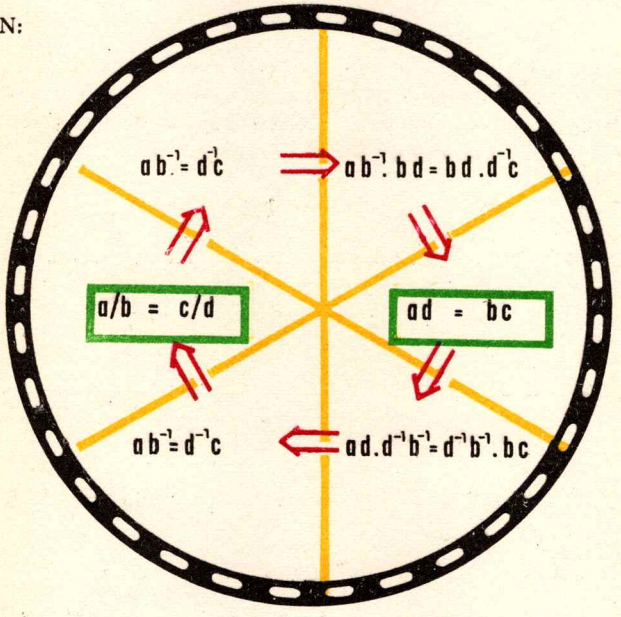


FIG. 217

Luego

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \iff \boxed{ad = bc}$$

l.q.q.d.

***

Si $a \in \mathbf{R}$ y. $b \in \mathbf{R}_o$,

Entonces b y b^{-1} tienen el mismo signo.

Luego ab y $ab^{-1} = a/b$ tienen el mismo signo.

11 — TEOREMA DE THALES (nuevo enunciado)

Si

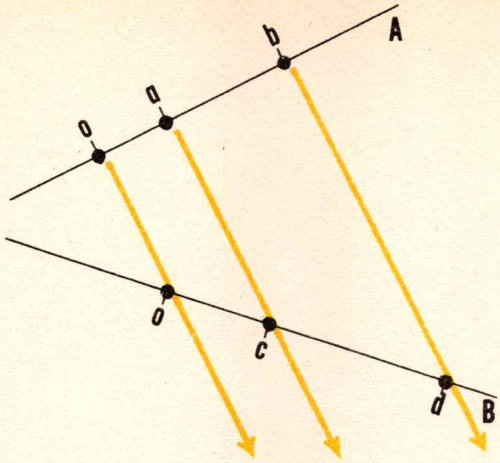


FIG. 218

Entonces

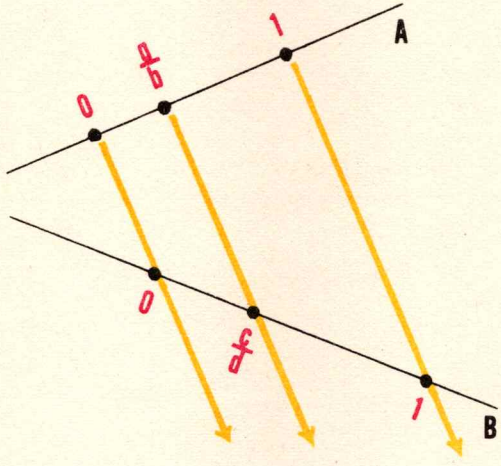


FIG. 219

...y $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$

De donde resulta el nuevo enunciado del TEOREMA DE THALES:

Toda proyección paralela $A_{\infty} \rightarrow B_{\infty}$ que aplica o sobre o conserva la razón de las abscisas.

12 — EJERCICIOS

La letras designan reales. Los denominadores se suponen siempre no nulos.

1. $\frac{0}{a} = 0$

2. $\frac{c}{d} = 0 \iff c = 0$

3. $\frac{ar}{br} = \frac{a}{b}$

4. $(b^{-1})^{-1} = b$ (para todo $b \in \mathbf{R}_0$)

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

6. $\frac{r}{1} = r;\ \frac{1}{r} = r^{-1}$

7. $\frac{a}{b^{-1}} = ab = \frac{a}{\frac{1}{b}}$

8. $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

9. $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$

10. $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$

11. $\frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{b}{a}$

12. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

13.

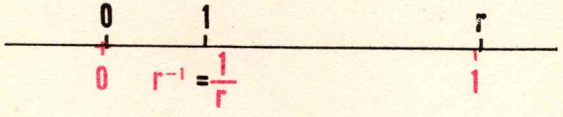


FIG. 220

14.

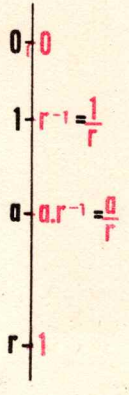


FIG. 221

15. $a/b > 0 \iff a \cdot b^{-1} > 0$

$\iff a$ y b^{-1} tienen igual signo

$\iff a$ y b de tienen igual signo $\iff ab > 0$

16. $x/y > 0 \iff xy > 0 \iff y/x > 0$

17. $1/2 = 2^{-1} = 0{,}5$

$1/5 = 5^{-1} = 0{,}2$

$2/5 = 0{,}4$

$3/5 = 0{,}6$

$4/5 = 0{,}8$

18.

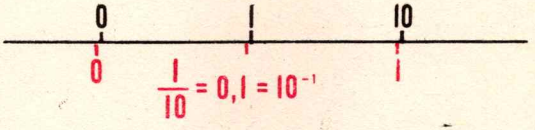


FIG. 222

19. $(r^{-1})^{-1} = r = \dfrac{1}{\dfrac{1}{r}} = \left(\dfrac{1}{r}\right)^{-1} = \dfrac{1}{r^{-1}}$

20. $\#\{\text{La torre Eiffel, la Tierra, el monumento más alto de París}\} = 2$

21. $\#\{\text{Napoleón, el padre del hijo de Napoleón}\} = 1$

22. $\#\left\{\dfrac{1}{2}, 2/4, \dfrac{3}{6}, (-4)/(-8), \dfrac{5}{10}, \dfrac{117}{234}\right\} = 1$

23. $\#\left\{\dfrac{0}{12}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{4}{1}, \dfrac{-7}{22}, \dfrac{22}{-7}, \dfrac{3}{10}, \dfrac{3.000}{100.000}, \dfrac{3.000.000}{1.000.000.000}, \dfrac{14}{-44}, \dfrac{16}{4}, \dfrac{144}{231}, \dfrac{121}{165}, \dfrac{0}{7}, \right.$

$\left. \dfrac{39}{130}, \dfrac{-21}{166}, \dfrac{68}{17}, \dfrac{10}{15}, \dfrac{33}{45}, \dfrac{-12}{-18}, \dfrac{22}{30}, \dfrac{6}{9}, \dfrac{56}{14}, \dfrac{12}{18}, \dfrac{64}{16}, \dfrac{0}{-5}\right\} = 11$

24.

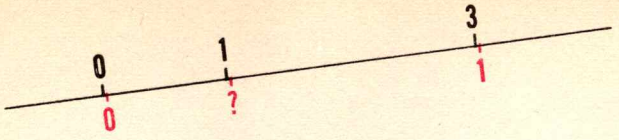


FIG. 223

25.

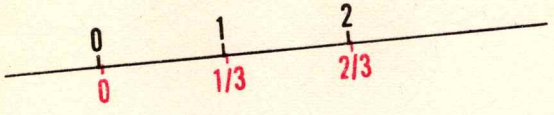


FIG. 224

26.

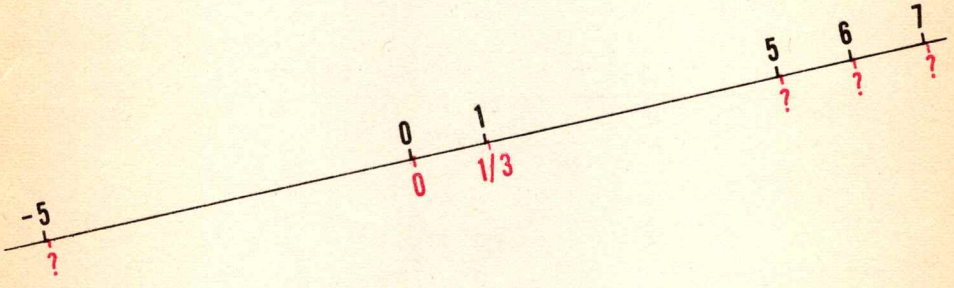


FIG. 225

27.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} =$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} =$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} =$

$\frac{-1}{1} =$

$\frac{-2}{3} \cdot \frac{4}{-5} = \frac{8}{15}$

28.

$\frac{ab}{bc} =$

$\frac{abd}{cd} =$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} =$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} =$

29. Si $a, b \in \mathbf{R}_0$

Entonces $\frac{a^{-1}}{b^{-1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

30. Sobre la recta D_{01}; construye los puntos de abscisas $\frac{1}{3}$, $\frac{-2}{3}$

31. Sobre la recta D_{01}, construye el punto de abscisa $\frac{7}{18}$

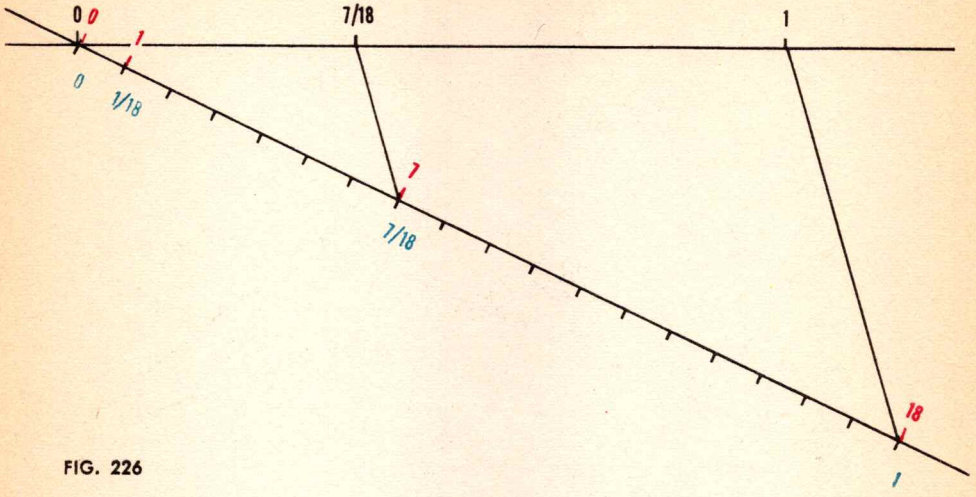


FIG. 226

32. Sobre la recta D_{01}, se te dan los puntos de abscisas a y b
Construye el punto de abscisa a/b

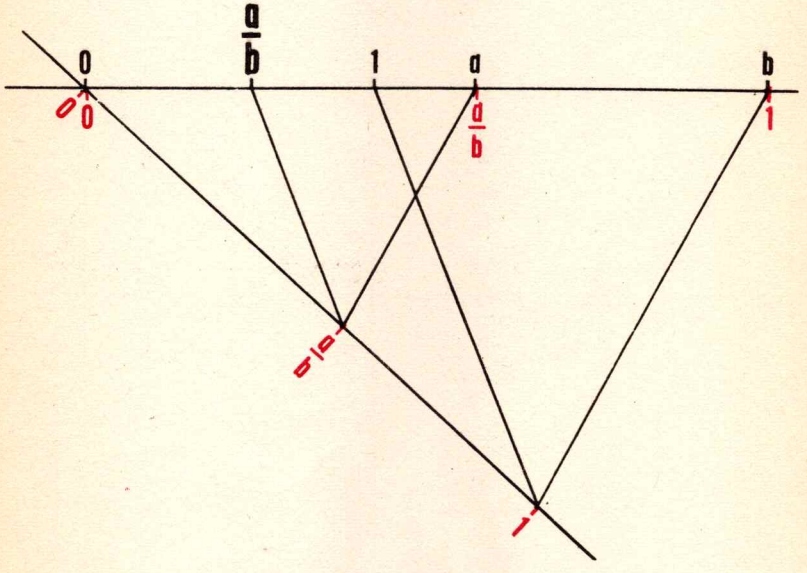
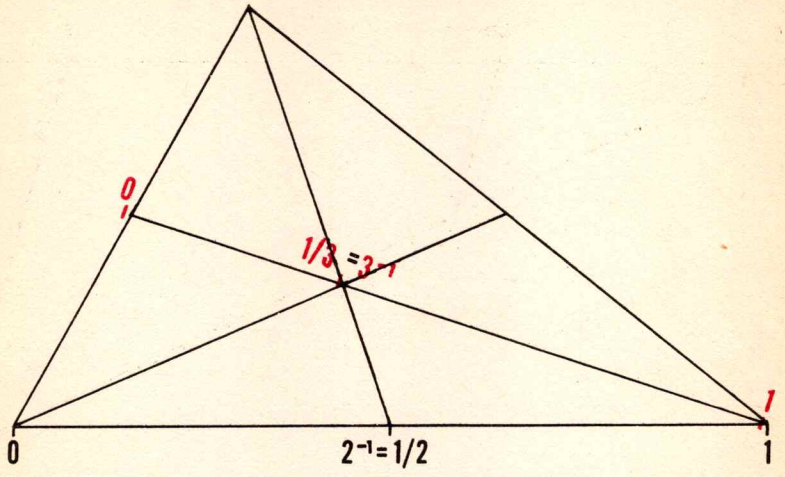


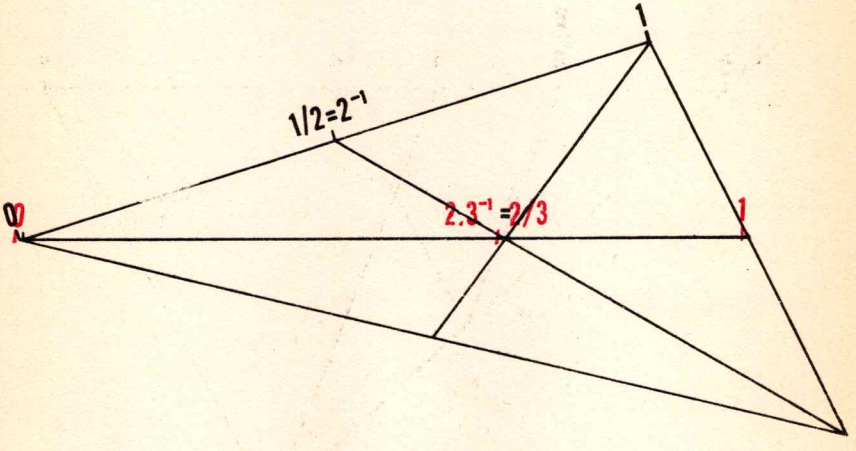
FIG. 227

33. $\mathbf{R}_0^+$ es un sub-grupo de $\mathbf{R}_0$, . y $\mathbf{R}_0^-$ no es un sub-grupo de $\mathbf{R}_0$, .

34.



TRIÁNGULOS Y SUS MEDIANAS
FIG. 228



TRIÁNGULOS Y SUS MEDIANAS
FIG. 229

35. Para todo vector $\vec{v} \in V$, la transformación de V:

$$V \to V : \vec{x} \to \vec{v} + \vec{x}$$

es una permutación de V

36. **Si** $G, *$ es un grupo y $g \in G$,

Entonces $G \to G : x \to g * x$

es una permutación de G

37. **Si** $r \in \mathbf{R}_0$

Entonces $\mathbf{R}_0 \to \mathbf{R}_0 : x \to r \cdot x$ es una *permutación* de $\mathbf{R}_0$

...y no es un isomorfismo $\mathbf{R}_0, \cdot \to \mathbf{R}_0, \cdot$

38. **Si** $c \in \Pi$

Entonces $\mathbf{R}_0, \cdot \to \mathcal{H}_c$ o : $r \to$ homotecia de centro c y de razón r es un isomorfismo.

39. **Si** $a, b \in \Pi$,

Entonces los grupos $\mathcal{H}_a$ o y $\mathcal{H}_b$ o son isomorfos.

40. **Si** $a, b \in \mathbf{R}$ y $r \in \mathbf{R}_0$,

Entonces $ra = b \iff a = \dfrac{b}{r}$

$$2a = b \iff a = \frac{b}{2}$$

41. **Si** $a, b \in \mathbf{R}$,

Entonces $(ab)/2 = (a/2) \cdot b = a \cdot (b/2)$

$$\frac{ab}{2} = \frac{a}{2} \cdot b = a \cdot \frac{b}{2}$$

42. **Si** $a \in \mathbf{R}$ y $b, c \in \mathbf{R}_0$,

Entonces $(a/b)/c = a/(bc) = (a/c)/b$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} = \frac{\frac{a}{c}}{b}$$

43. Si $a, b, c, d \in \mathbf{R}_0$,

Entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\iff \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \iff \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \iff \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

$\iff ad = bc \iff \frac{1}{ad} = \frac{1}{bc}$

$\iff a = \frac{bc}{d} \iff b = \frac{ad}{c} \iff c = \frac{ad}{b} \iff d = \frac{bc}{a}$

44. Si $a, c \in \mathbf{R}$ y $b, d \in \mathbf{R}_0$,

Entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

45. La ley / está definida en $\mathbf{R}_0$:

$\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0 \to \mathbf{R}_0 : (a, b) \to a/b$

Muestra que esta ley no es ni asociativa, ni conmutativa.

46. $\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \iff x = \frac{bc}{a}$

47.

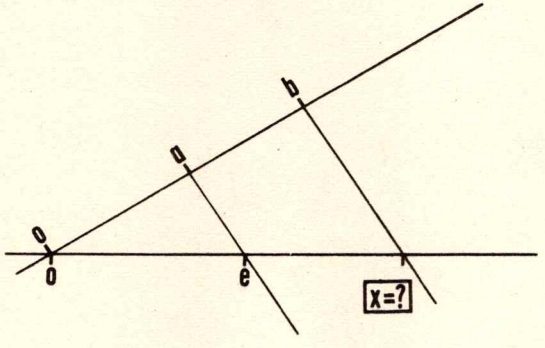
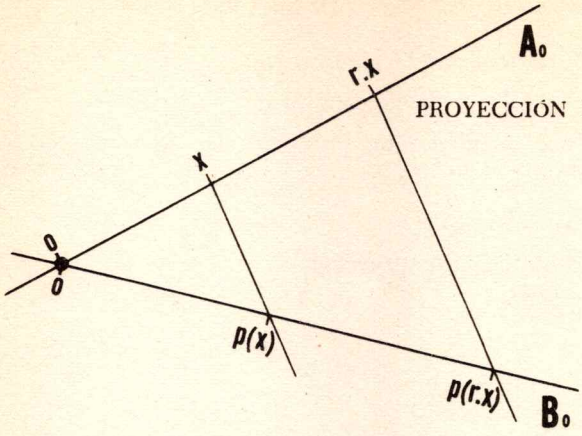


FIG. 230

48.

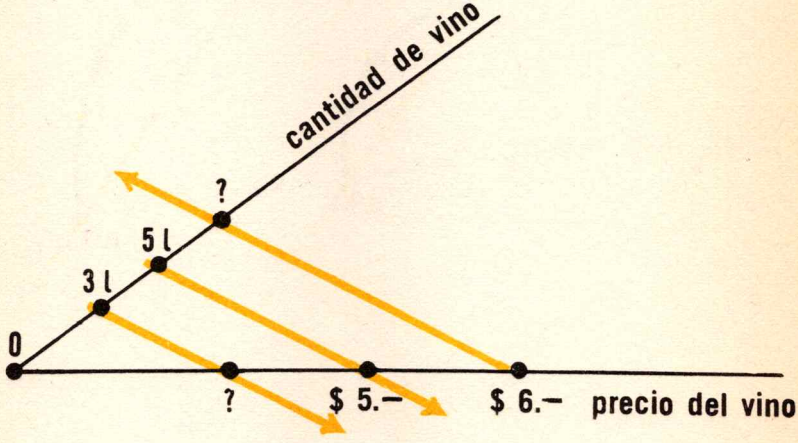


PROYECCIÓN PARALELA $p : A_o \to B_o$

FIG. 231

$$p(r \cdot x) = r \cdot p(x)$$

49. *Problema:* 5 l de vino cuestan 5.— \$.
¿Cuál es el precio de 3 l de vino?
¿Qué cantidad de vino podría yo comprar con 6.— \$?



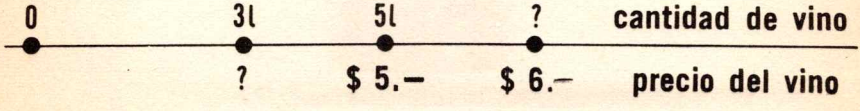


FIG. 232

50. En un negocio, efectué una compra $\boldsymbol{a}$.

La represento por medio de un punto de Π_0

He aquí un real r

¿Qué punto de Π_0 representa la compra $r\boldsymbol{a}$?

Designo con $p(\boldsymbol{a})$ el precio de la compra $\boldsymbol{a}$

Represento $p(\boldsymbol{a})$ por medio de un punto de Π_0 que no pertenece a la recta $o\boldsymbol{a}$.

Es cierto que $p(r\boldsymbol{a}) = r \cdot p(\boldsymbol{a})$.

El precio de $r\boldsymbol{a}$ se obtiene por proyección.

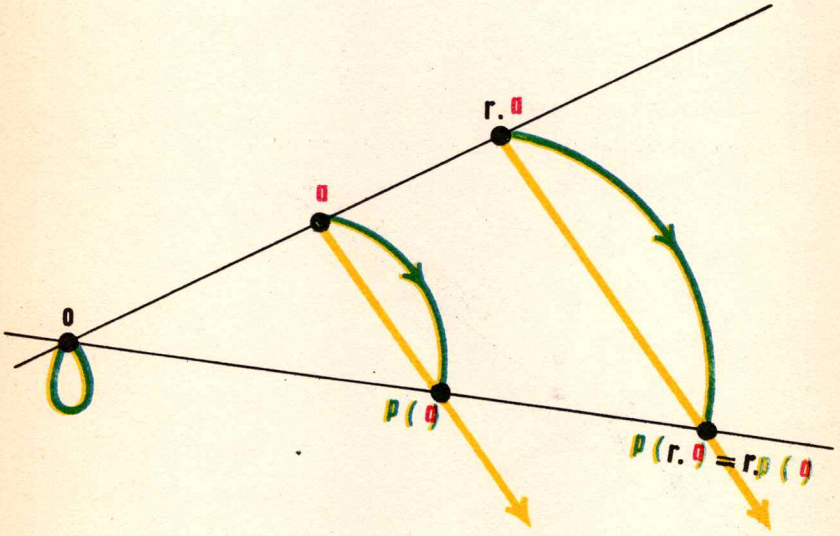


FIG. 233

11

La multiplicación escalar

1 — MULTIPLICACIÓN ESCALAR

He aquí un vector $\vec{v}$

de las homotecias h_1, h_2

de centros o_1, o_2

y de igual razón r

El filme describe la construcción

de $h_1(\vec{v})$ y $h_2(\vec{v})$

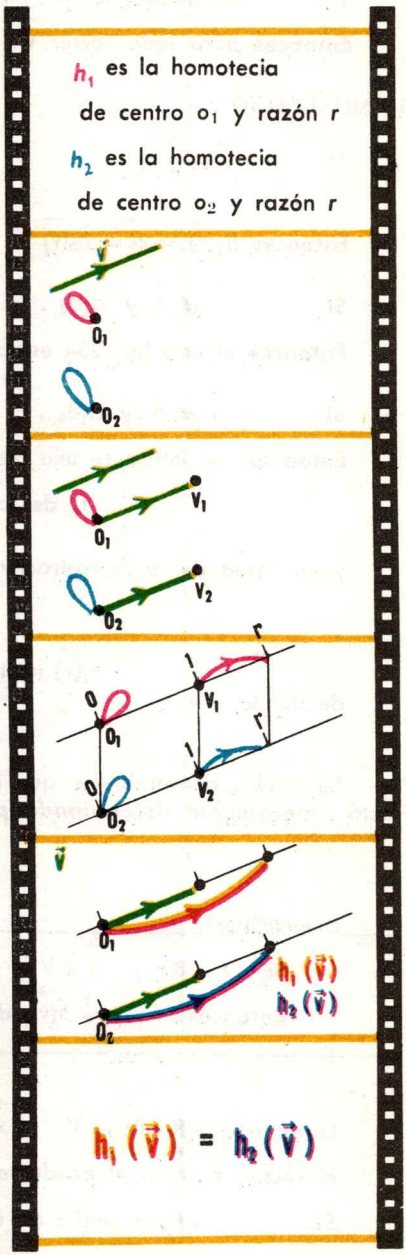


FIG. 234

PROPOSICIÓN

Si *las homotecias* h_1 *y* h_2 *tienen la misma razón* r

Entonces *para todo vector* $\vec{v}$: $h_1(\vec{v}) = h_2(\vec{v})$

DEMOSTRACIÓN:

- **Si** $\vec{v} = \vec{o}$,

  Entonces $h_1(\vec{v}) = \vec{o} = h_2(\vec{v})$

- **Si** $\vec{v} \neq \vec{o}$ **y** o_1o_2 , $\vec{v}$ no tienen la misma dirección

  Entonces el filme fig. 234 establece que $h_1(\vec{v}) = h_2(\vec{v})$

- **Si** $\vec{v} \neq \vec{o}$ **y** o_1o_2 , $\vec{v}$ tienen la misma dirección

  Entonces se introduce una tercera homotecia

  h_3 de razón r y de centro $o_3 \notin o_1o_2$

  y en virtud de la demostración del filme

$$h_1(\vec{v}) = h_3(\vec{v}) \quad \text{y} \quad h_3(\vec{v}) = h_2(\vec{v})$$

de donde

$$h_1(\vec{v}) = h_2(\vec{v})$$ l.q.q.d.

Se acaba de establecer que ***la imagen de un vector por una homotecia está enteramente determinada por la razón de la homotecia y el vector.***

DEFINICIÓN

Si $r \in \mathbf{R}$ **y** $\vec{v} \in V$

Entonces $r \cdot \vec{v} = h(\vec{v})$ *donde* h *designa toda homotecia de razón* r

La aplicación $\mathbf{R} \times V \to V : (r, \vec{v}) \to r \cdot \vec{v}$ *se llama* ***multiplicación escalar.***

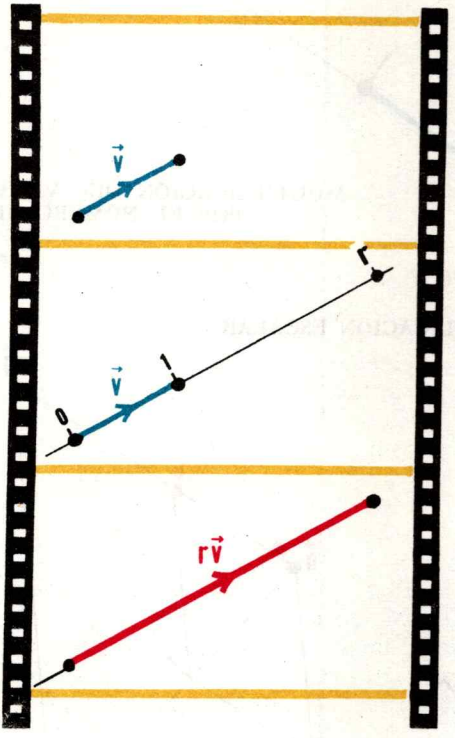
El vector $r \cdot \vec{v}$ *es el* ***producto*** *del vector* $\vec{v}$ *por el número* r

Si *existe un real* r *tal que* $\vec{u} = r \cdot \vec{v}$,

Entonces *se dice que* $\vec{u}$ *es un* ***múltiplo*** *de* $\vec{v}$

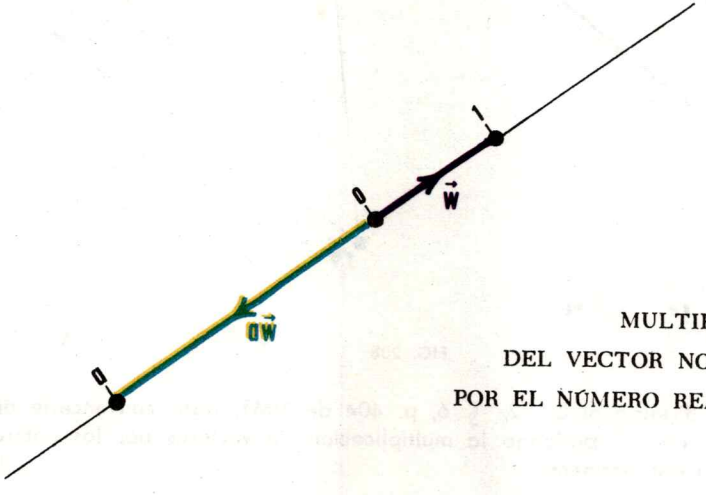
La multiplicación escalar se anota por medio de un punto que casi siempre se omite:

Para todo $r \in \mathbf{R}$ y para todo $\vec{v} \in V : r \cdot \vec{v} = r\vec{v}$



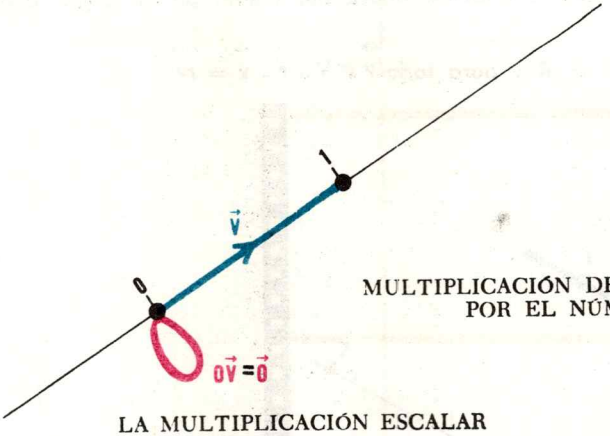
MULTIPLICACIÓN DEL VECTOR NO NULO $\vec{v}$ POR EL NÚMERO REAL r

FIG. 235



MULTIPLICACIÓN DEL VECTOR NO NULO $\vec{w}$ POR EL NÚMERO REAL $a < 0$

FIG. 236



MULTIPLICACIÓN DEL VECTOR $\vec{v}$ POR EL NÚMERO REAL 0

FIG. 237

LA MULTIPLICACIÓN ESCALAR

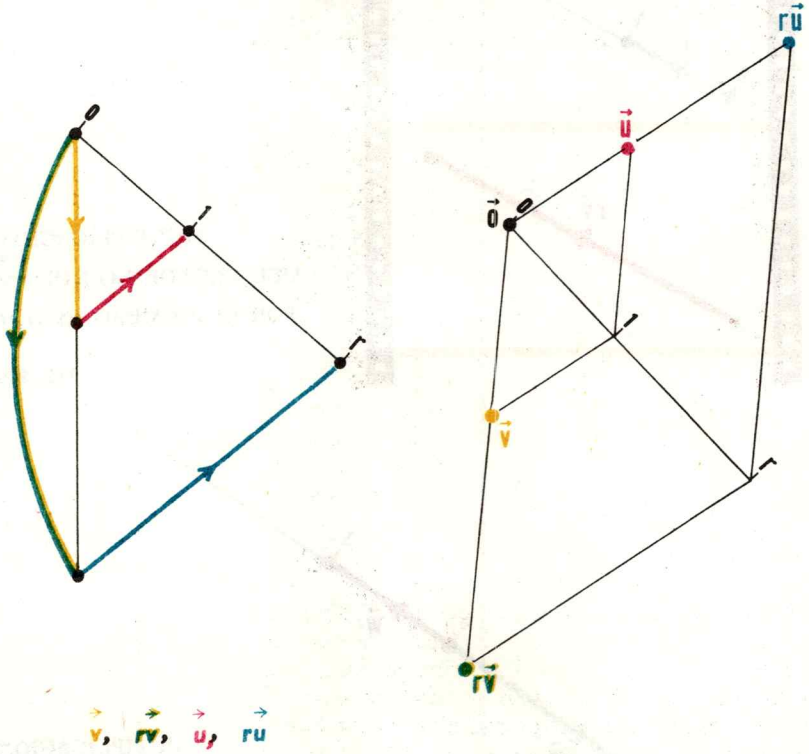


FIG. 238

Te bastará dirigirte al C. 22, § 6, p. 404 de MM1, para convencerte de que la multiplicación escalar prolonga la multiplicación de vectores por los enteros racionales definida anteriormente.

EJERCICIOS

1. a) Para toda homotecia h y todo vector $\vec{v}$:

$$h(\vec{v}) = \rho(h) \cdot \vec{v}$$

b) **Si** h es una homotecia y $\vec{v}$ es un vector

Entonces $\rho(h) = a \Rightarrow h(\vec{v}) = a \cdot \vec{v}$

2.

Si

Entonces

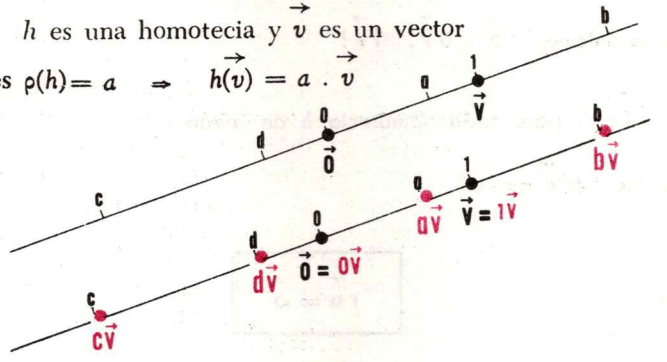


FIG. 239

3.

Si

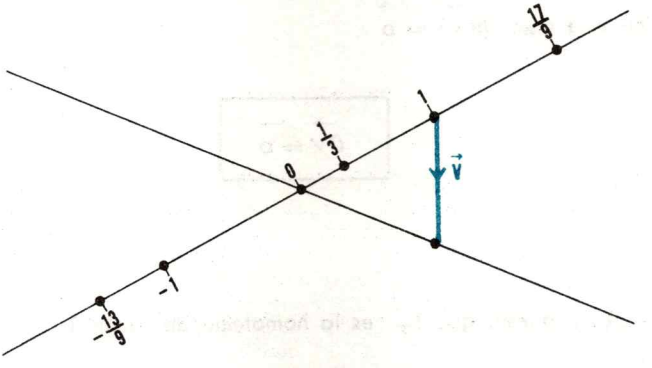


FIG. 240

Entonces

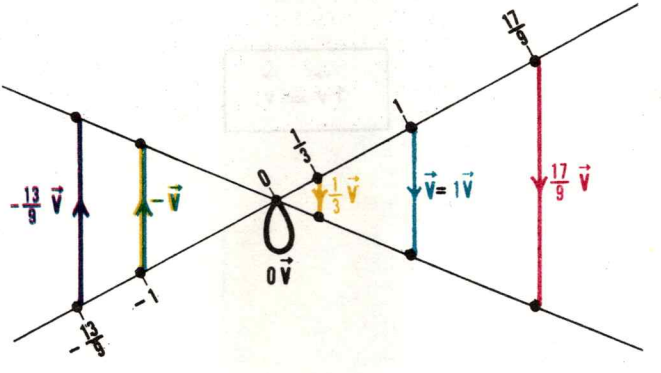


FIG. 241

2 — MULTIPLICACION ESCALAR Y $\vec{o}$, 0, 1_π

He aquí un real r y un vector $\vec{v}$

¿Quieres calcular $r\vec{o}$, $0\vec{v}$, $1\vec{v}$?

$r\vec{o} = h(\vec{o})$ para toda homotecia h de razón r

Ahora bien $h(\vec{o}) = \vec{o}$

Luego

$$\boxed{r\vec{o} = \vec{o}}$$

$0\vec{v} = h(\vec{v})$ para toda homotecia h de razón nula.

Pero, en este caso, $h(\vec{v}) = \vec{o}$

Luego

$$\boxed{0\vec{v} = \vec{o}}$$

$1\vec{v} = 1_\pi(\vec{v})$ puesto que 1_π es la homotecia de razón 1

$= \vec{v}$

Luego

$$\boxed{1\vec{v} = \vec{v}}$$

3 — ASOCIATIVIDAD MIXTA

Si $a, b \in \mathbf{R}$ **et** $\vec{v} \in V$, **Entonces** $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

El primer punto de esta fórmula indica la multiplicación de reales, y los otros tres puntos, la multiplicación escalar.

Ésta es la razón por la cual la propiedad expresada recibe el nombre de **asociatividad mixta.**

$$\underbrace{(a \cdot b)}_{\text{MULTIPLICACIÓN DE REALES}} \cdot \vec{v} = a \cdot \underbrace{(b \cdot \vec{v})}_{\text{MULTIPLICACIÓN ESCALAR}}$$

DEMOSTRACIÓN:

He aquí un punto $o \in \Pi$

la homotecia h_1 de centro o y de razón b

la homotecia h_2 de centro o y de razón a

La compuesta h_2 o h_1 es la homotecia de centro o y de razón $a \cdot b$.

Teniendo en cuenta la definición de la multiplicación escalar,

$$\begin{aligned} b \cdot \vec{v} &= h_1(\vec{v}) \\ a \cdot (b \cdot \vec{v}) &= h_2(h_1(\vec{v})) \\ &= (h_2 \circ h_1)(\vec{v}) \\ &= (a \cdot b) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

l.q.q.d.

Convención:

Como para todo a b, $\in \mathbf{R}$ y todo $\vec{v} \in V$: $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

se pondrá $ab\vec{v} = a \cdot b \cdot \vec{v} = (a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

Se utilizarán a menudo puntos en lugar de paréntesis para indicar el orden en el cual se quieren calcular los productos.

Así $ab \cdot \vec{v}$ significa que se multiplica $\vec{v}$ por el producto ab

$a \cdot b\vec{v}$ significa que se multiplica el producto $b\vec{v}$ por a

La asociatividad mixta se expresa claramente mediante la fórmula

$$ab \cdot \vec{v} = a \cdot b\vec{v}$$

4 — LA MULTIPLICACIÓN ESCALAR DISTRIBUYE LA ADICIÓN VECTORIAL

Si $a \in \mathbf{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V$, **Entonces** $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

DEMOSTRACIÓN:

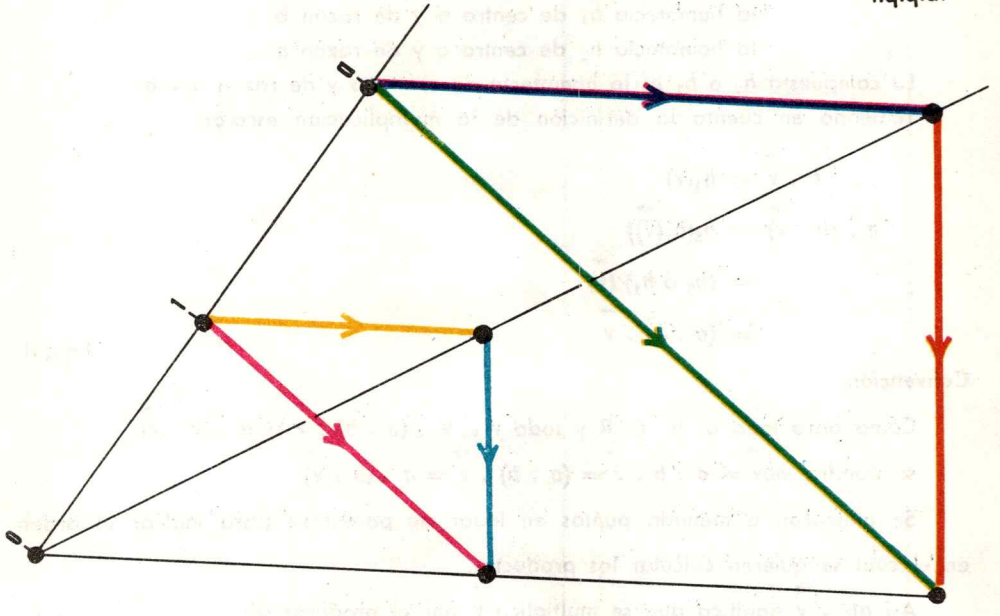
He aquí una homotecia h de razón a

Luego, $a(\vec{u} + \vec{v}) = h(\vec{u} + \vec{v})$ (def. multiplicación escalar)

$= h(\vec{u}) + h(\vec{v})$ (C. 9, § 9, prop. 10, c, p. 198)

$= a\vec{u} + a\vec{v}$ (def. multiplicación escalar)

l.q.q.d.



$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $a\vec{u}$, $a\vec{v}$, $a(\vec{u} + \vec{v})$,

$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

FIG. 242

5 — LA MULTIPLICACIÓN ESCALAR DISTRIBUYE LA ADICIÓN DE REALES

Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $\vec{v} \in V$, **Entonces** $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

DEMOSTRACIÓN:

Si $\vec{v} = \vec{o}$,

Entonces $(a + b)\vec{v} = \vec{o}$ (§ 2, *a*).

$a\vec{v} + b\vec{v} = \vec{o} + \vec{o}$ (§ 2, *a*).

$= \vec{o}$

Si $\vec{v} \neq \vec{o}$,

Entonces

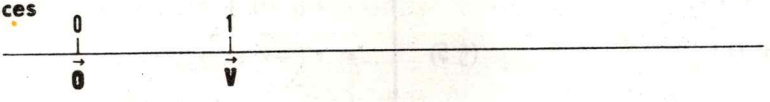


FIG. 243

Para todo $r \in \mathbf{R}$, $r\vec{v}$ es el vector de abscisa r (que habíamos anotado $\vec{r}$ en el § 1 del C. 7).

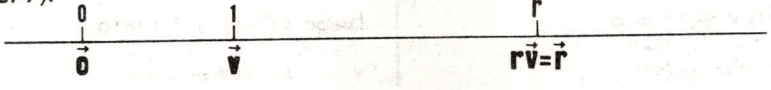


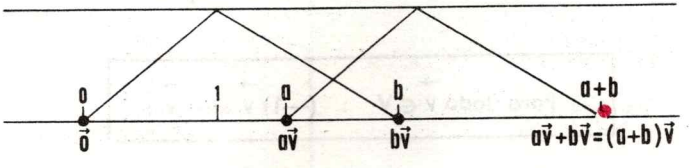
FIG. 244

Pero la adición de números reales está definida por

Para todo $a, b \in \mathbf{R}$: $\overrightarrow{a + b} = \vec{a} + \vec{b}$

Luego $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

l.q.q.d.



Para todo $a, b \in \mathbf{R}$ y todo $\vec{v} \in V$: $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

LA MULTIPLICACIÓN ESCALAR
DISTRIBUYE
LA ADICIÓN DE NÚMEROS REALES

FIG. 245

6 — REGLA DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN ESCALAR

Si $r \in \mathbf{R}$ y $\vec{v} \in V$

Entonces

$$\boxed{\begin{aligned}(-r)\,\vec{v} &= -(r\vec{v}) = r(-\vec{v}) \\ (-r)(-\vec{v}) &= r\vec{v}\end{aligned}}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned}&(-r)\vec{v} + r\vec{v} \\ &= (-r + r)\,\vec{v} && (\S\ 5) \\ &= 0\,\vec{v} \\ &= \vec{o}\end{aligned}$$

Luego $(-r)\,\vec{v} + r\vec{v} = \vec{o}$

y $(-r)\,\vec{v} = -(r\vec{v})$

$$\begin{aligned}&r(-\vec{v}) + r\vec{v} \\ &= r(-\vec{v} + \vec{v}) && (\S\ 4) \\ &= r\,\vec{o} \\ &= \vec{o}\end{aligned}$$

Luego $r(-\vec{v}) + r\vec{v} = \vec{o}$

y $r(-\vec{v}) = -r\vec{v}$

Aplicando estos resultados, se obtiene fácilmente

$$(-r)(-\vec{v}) = -(r(-\vec{v})) = -(-(r\vec{v})) = r\vec{v}$$

l.q.q.d.

En particular, para todo $\vec{v} \in V$: $(-1)\,\vec{v} = -(1 \cdot \vec{v}) = -\vec{v}$

$$\boxed{\text{Para todo } \vec{v} \in V \ : \ (-1)\,\vec{v} = -\vec{v}}$$

Convención:

Como $(-r)\,\vec{v} = -(r\vec{v}) = r(-\vec{v})$,

Se pondrá $-r\vec{v} = (-r)\,\vec{v} = -(r\vec{v}) = r(-\vec{v})$

6. REGLA DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN ESCALAR

Como consecuencia de la regla de los signos, establecemos que

la multiplicación escalar distribuye la sustracción de reales y la sustracción vectorial

Si a, b designan reales y $\vec{u}, \vec{v}$ vectores

Entonces $(a - b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$ y $a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$

DEMOSTRACIÓN:

$$
\begin{aligned}
&(a - b)\vec{u} \\
&= (a + (-b))\vec{u} \\
&= a\vec{u} + (-b)\vec{u} \\
&= a\vec{u} + (-b\vec{u}) \\
&= a\vec{u} - b\vec{u}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&a(\vec{u} - \vec{v}) \\
&= a(\vec{u} + (-\vec{v})) \\
&= a\vec{u} + a(-\vec{v}) \\
&= a\vec{u} + (-a\vec{v}) \\
&= a\vec{u} - a\vec{v}
\end{aligned}
$$

l.q.q.d

Justifica cada una de las etapas de esta demostración.

7 — PRODUCTO NULO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO REAL

He aquí un número real r y un vector $\vec{v}$

En el parágrafo 2 establecimos que

$$r\vec{o} = \vec{o}$$

$$0\vec{v} = \vec{o}$$

Dicho de otro modo,

$$r = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{o} \implies r\vec{v} = \vec{o}$$

Vamos a probar que

$$r\vec{v} = \vec{o} \implies r = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{o}$$

DEMOSTRACIÓN:

Si

$$r\vec{v} = \vec{o} \qquad (1)$$

Entonces

o *bien*		o *bien*
$r = 0$		$r \neq 0$
		$r^{-1} \in \mathbf{R}$. y $r^{-1}r = 1$
		$\vec{v} = 1\vec{v}$ (§ 2)
		$= r^{-1}r \cdot \vec{v}$
		$= r^{-1} \cdot r\vec{v}$ (asociatividad mixta)
		$= r^{-1} \cdot \vec{o}$ (1)
		$= \vec{o}$ (§ 2)
$r = 0$		$\vec{v} = \vec{o}$

l.q.q.d.

Para todo número real r y todo vector $\vec{v}$:

$$\vec{rv} = \vec{o} \iff r = 0 \quad o \quad \vec{v} = \vec{o}$$

He aquí dos consecuencias inmediatas del resultado anterior

Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $\vec{o} \neq \vec{u} \in V$,	**Si** $0 \neq a \in \mathbf{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V$
Entonces $a\vec{u} = b\vec{u} \Longrightarrow a = b$	**Entonces** $a\vec{u} = a\vec{v} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

DEMOSTRACIÓN:

$$\vec{au} = \vec{bu}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{au} - \vec{bu} = \vec{o}$$
$$\Downarrow$$
$$(a - b)\vec{u} = \vec{o}$$
$$\Downarrow$$
$$a - b = o \quad (\text{porque } \vec{u} \neq \vec{0})$$
$$\Downarrow$$
$$a = b$$

$$\vec{au} = \vec{av}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{au} - \vec{av} = \vec{o}$$
$$\Downarrow$$
$$a(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{o}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{o} \quad (\text{porque } a \neq 0)$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{u} = \vec{v}$$

l.q.q.d.

Justifica cada una de las etapas de esta demostración.

8 — LINEALIDAD DE LAS PROYECCIONES PARALELAS Y DE LAS HOMOTECIAS

TEOREMA

Si $a, b \in \mathbb{R}; \vec{x}, \vec{y} \in V$,

Entonces 1º para toda homotecia h: $h(a\vec{x} + b\vec{y}) = a.h(\vec{x}) + b.h(\vec{y})$

2º para toda proyección paralela p: $p(a\vec{x} + b\vec{y}) = a.p(\vec{x}) + b.p(\vec{y})$

Este teorema se expresa brevemente diciendo que

TEOREMA

Las homotecias y las proyecciones paralelas son lineales.

DEMOSTRACIÓN:

1º Pongamos $c = \rho(h)$

$$h(a\vec{x} + b\vec{y})$$

$= c(a\vec{x} + b\vec{y})$ Definición de la multiplicación escalar.

$= c.a\vec{x} + c.b\vec{y}$ La multiplicación escalar distribuye la adición vectorial.

$= ca.\vec{x} + cb.\vec{y}$ Asociatividad mixta.

$= ac.\vec{x} + bc.\vec{y}$ La multiplicación de reales es conmutativa.

$= a.c\vec{x} + b.c\vec{y}$ Asociatividad mixta.

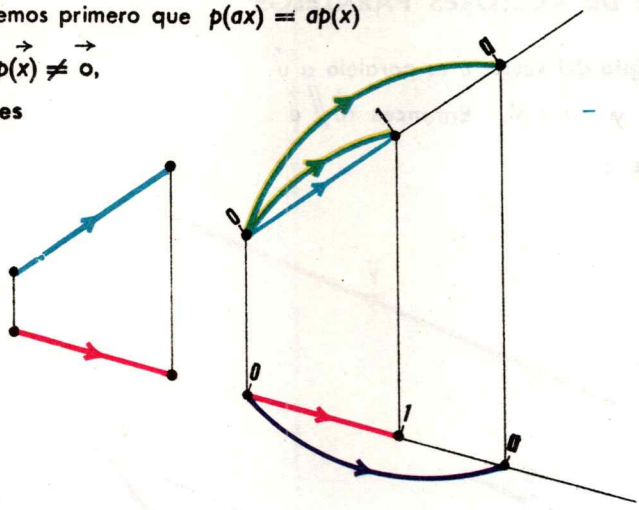
$= ah(\vec{x}) + bh(\vec{y})$ Definición de la multiplicación escalar.

l.q.q.d.

2º A. Probemos primero que $p(a\vec{x}) = ap(\vec{x})$

- Si $p(\vec{x}) \neq \vec{o}$,

  Entonces



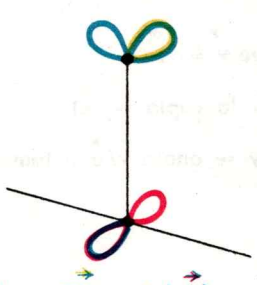
$\vec{x}$, $p(\vec{x})$, $a\vec{x}$, $p(a\vec{x})$

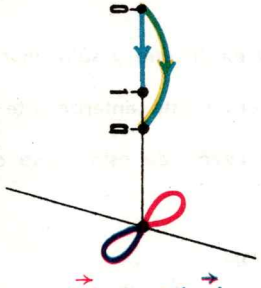
$$p(a\vec{x}) = a \cdot p(\vec{x})$$

FIG. 246

- Si $p(\vec{x}) = \vec{o}$,

  Entonces nos encontramos en uno u otro de los casos particulares siguientes





$\vec{x} = p(\vec{x}) = a\vec{x} = p(a\vec{x}) = \vec{o}$ | $p(\vec{x}) = p(a\vec{x}) = \vec{o}$

$$p(a\vec{x}) = a \cdot p(\vec{x})$$

FIG. 247

l.q.q.d.

B. $p(a\vec{x} + b\vec{y})$

$= p(a\vec{x}) + p(b\vec{y})$ MM1, C. 22, § 11, p. 419

$= a\,p(\vec{x}) + b\,p(\vec{y})$ En virtud de A

l.q.q.d.

9 — RAZÓN DE VECTORES PARALELOS

Todo **múltiplo** del vector $\vec{u}$ es paralelo a $\vec{u}$

Si $r \in R$ y $\vec{u} \in V$, **Entonces** $r\vec{u} /\!/ \vec{u}$

Si $\vec{v} /\!/ \vec{e} \neq \vec{o}$

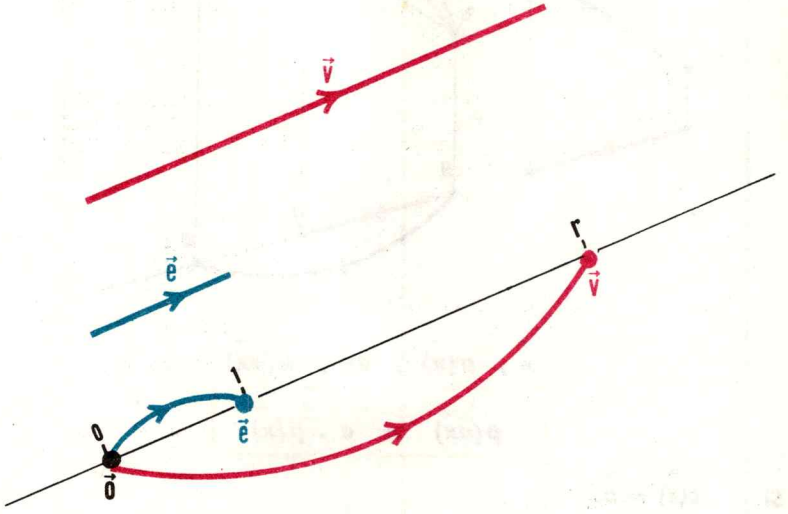


FIG. 248

Entonces existe uno y sólo un $r \in \mathbf{R}$ tal que $\vec{v} = r\vec{e}$

Este número r está enteramente definido por la cupla $(\vec{v}, \vec{e})$

Se llama **razón** de esta cupla de vectores y se anota $\vec{v}/\vec{e}$ o también $\dfrac{\vec{v}}{\vec{e}}$

DEFINICIÓN

Si $r \in R$, $\vec{o} \neq \vec{e} \in V$ y $\vec{v} \in V$

Entonces $\vec{v}/\vec{e} = r \iff \vec{v} = r\vec{e}$

Convención:

Cada vez que escribamos un término $\vec{u} / \vec{v}$, supondremos implícitamente que $\vec{u} /\!/ \vec{v} \neq \vec{o}$

La noción de la razón de vectores paralelos da lugar a un nuevo enunciado del

TEOREMA DE THALES

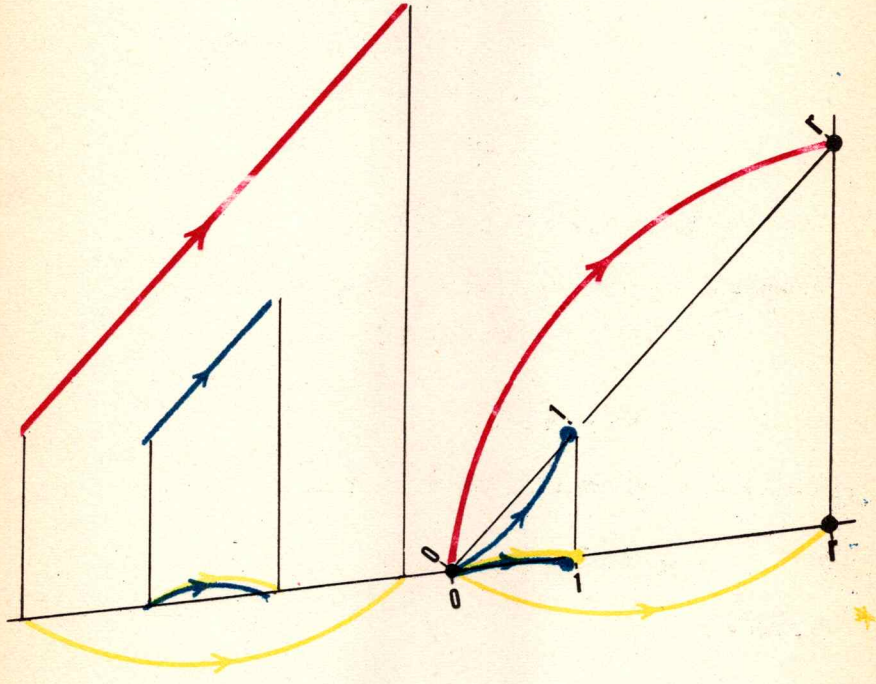
He aquí los vectores $\vec{v}$, $\vec{e}$ y una proyección paralela **p**

Si $\vec{v} /\!/ \vec{e} \neq \vec{o}$ y $p(\vec{e}) \neq \vec{o}$,

Entonces $p(\vec{v}) / p(\vec{e}) = \vec{v} / \vec{e}$

Brevemente y de manera menos precisa,

Las proyecciones paralelas conservan la razón de vectores paralelos



Si $\vec{v} /\!/ \vec{e} \neq \vec{o} \neq p(\vec{e})$

Entonces $\vec{v} / \vec{e} = p(\vec{v}) / p(\vec{e}) = r$

TEOREMA DE THALES

FIG. 249

10 — EJERCICIOS

1. Si $a, b, c \in \mathbf{R}$; $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$,

Entonces $(a + b + c)\vec{u} =$ | $a(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) =$

$(a - b)\vec{u} =$ | $a(\vec{u} - \vec{v}) =$

$(a + b - c)\vec{u} =$ | $a(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) =$

$(a + b)(\vec{u} + \vec{v}) =$

$(a - b)(\vec{u} + \vec{v}) =$

$(a + b)(\vec{v} - \vec{w}) =$

$(a - b)(\vec{u} - \vec{v}) =$

$(a - b + c)(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) =$

$a(b\vec{v} + c\vec{w}) =$

$a(b\vec{v} - c\vec{w}) =$

2. Si $a, b, c, x, y, z \in \mathbf{R}$; $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

Entonces $(a + b + c)(x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}) =$

$(a - b - c)(x\vec{u} - y\vec{v} + z\vec{w}) =$

3. Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $\vec{u} \in V$,

Entonces $a.b\vec{u} = ab.\vec{u} = ba.\vec{u} = b.a\vec{u}$

4. Si $r \in \mathbf{R}$ y $\vec{o} \neq \vec{v} \in V$,

Entonces $r\vec{v} \,/\, \vec{v} = r$

5. Si $\vec{o} \neq \vec{v} \in V$

Entonces $\vec{v} \,/\, \vec{v} = 1$

$(-\vec{v}) \,/\, \vec{v} = -1$

$\vec{v} \,/\, (-\vec{v}) = -1$

6. **Si** $\vec{u}, \vec{v}$ designan vectores no nulos,

Entonces $\vec{u} / \vec{v} = 1 \iff \vec{u} = \vec{v} \iff \vec{v} / \vec{u} = 1$

$\vec{u} / \vec{v} = -1 \iff \vec{u} + \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} / \vec{u} = -1$

7. **Si** $\vec{0} \neq \vec{e} \in V$ y $0 \neq r \in \mathbf{R}$,

Entonces $\vec{e} / r\vec{e} = r^{-1}$

8. **Si** $a \in \mathbf{R}$, $0 \neq b \in \mathbf{R}$, $\vec{e} \in V$,

Entonces $a\vec{e} = ab^{-1} \cdot b\vec{e}$

9. **Si** $\vec{0} \neq \vec{e} \in V$, $a \in \mathbf{R}$, $0 \neq b \in \mathbf{R}$,

Entonces $a\vec{e} / b\vec{e} = a/b$

10. **Si** $\vec{u}$ designa un vector y $\vec{v}$ un vector no nulo,

Entonces $\vec{u} / \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

11. **Si** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ designan vectores no nulos y $r \in \mathbf{R}_0$,

Entonces $\vec{u} = r\vec{v} \iff \vec{v} = r^{-1}\vec{u}$

12. **Si** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ designan vectores no nulos y $r \in \mathbf{R}_0$,

Entonces $\vec{u} / \vec{v} = r \iff \vec{v} / \vec{u} = r^{-1}$

13. **Si** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ designan vectores no nulos,

Entonces $\vec{u} / \vec{v} = (\vec{v} / \vec{u})^{-1}$

14. **Si** $\vec{v} /\!/ \vec{e} \neq \vec{0}$,

Entonces $\vec{v} = (\vec{v} / \vec{e}) \cdot \vec{e}$

15. Si $\vec{v} /\!/ \vec{e} \neq \vec{o}$ y $\vec{e} /\!/ \vec{u} \neq \vec{o}$,

Entonces $(\vec{v} / \vec{e}) \cdot (\vec{e} / \vec{u}) = \vec{v} / \vec{u}$

DEMOSTRACIÓN:

Pongamos $\vec{e} / \vec{u} = r$ y $\vec{v} / \vec{e} = s$

Luego $\vec{e} = r\vec{u}$ y $\vec{v} = s\vec{e}$

De donde $\vec{v} = s\vec{e} = s \cdot r\vec{u} = sr \cdot \vec{u}$

y $\vec{v} / \vec{u} = s \cdot r = (\vec{v} / \vec{e}) \cdot (\vec{e} / \vec{u})$

Recordemos que cada vez que un vector o un número figura como denominador, lo suponemos implícitamente no nulo.

16. Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V$,

Entonces

$$\vec{u} / \vec{v} = a/b$$

ssi

$$\vec{u} = \frac{a}{b} \cdot \vec{v}$$

ssi

$$b\vec{u} = \frac{b}{b} \cdot a\vec{v} \qquad \text{(porque } b \neq 0\text{)}$$

ssi

$$b\vec{u} = \frac{b}{b} a \cdot \vec{v}$$

ssi

$$b\vec{u} = a\vec{v}$$

17. Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V$

Entonces

$$\frac{\vec{u}}{\vec{v}} = \frac{a}{b} \iff a\vec{v} = b\vec{u}$$

18. Si $r \in \mathbf{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V$

Entonces $\dfrac{\overrightarrow{ru}}{\vec{v}} = r \cdot \dfrac{\vec{u}}{\vec{v}}$

Demuestra esta fórmula e ilústrala.

19. Si $r \in \mathbf{R}_0$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V$,

Entonces $\dfrac{\vec{u}}{\overrightarrow{rv}} = r^{-1} \cdot \dfrac{\vec{u}}{\vec{v}}$

20. Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V$,

Entonces $\dfrac{a}{b} \dfrac{\vec{u}}{\vec{v}} = \dfrac{a\vec{u}}{b\vec{v}}$

21. Si $\vec{v} /\!\!/ \vec{e} /\!\!/ \vec{u}$ y $\vec{o} \neq \vec{e}$,

Entonces $(\vec{v} + \vec{u})/\vec{e} = \vec{v}/\vec{e} + \vec{u}/\vec{e}$

22.

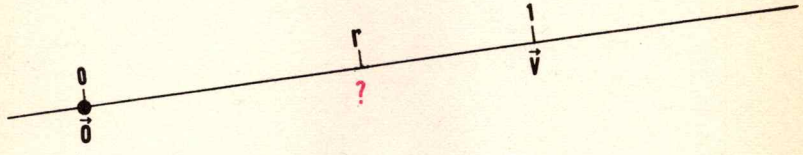


FIG. 250

23.

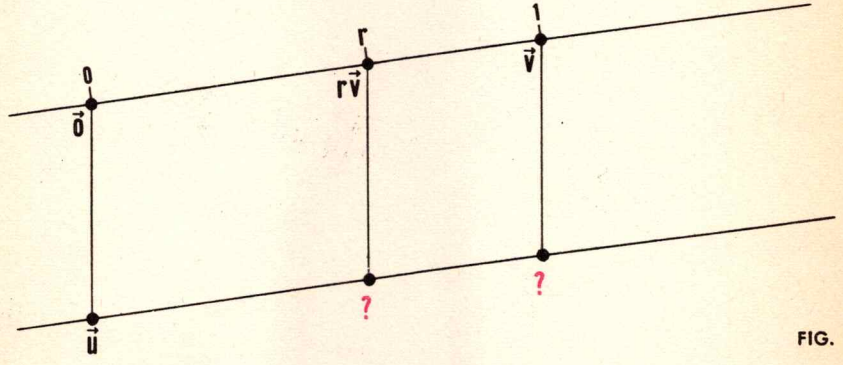
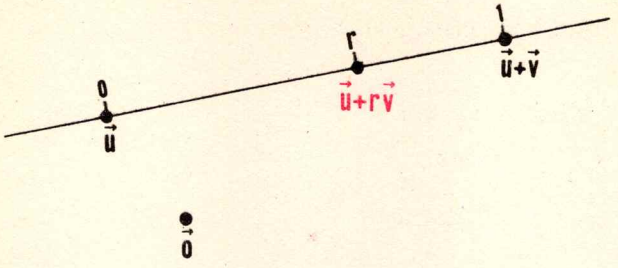


FIG. 251

24.

Si

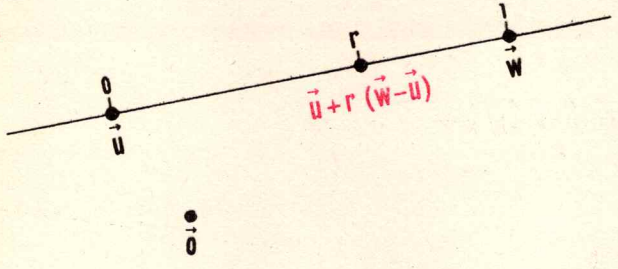


Entonces

FIG. 252

25.

Si

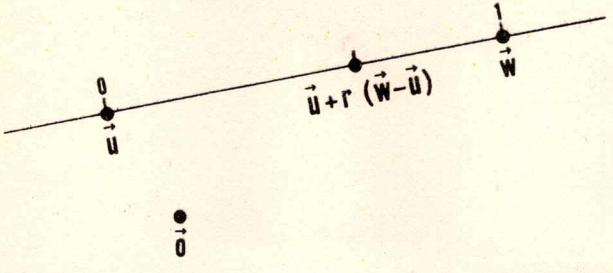


Entonces

FIG. 253

26.

Si



Entonces

FIG. 254

27.

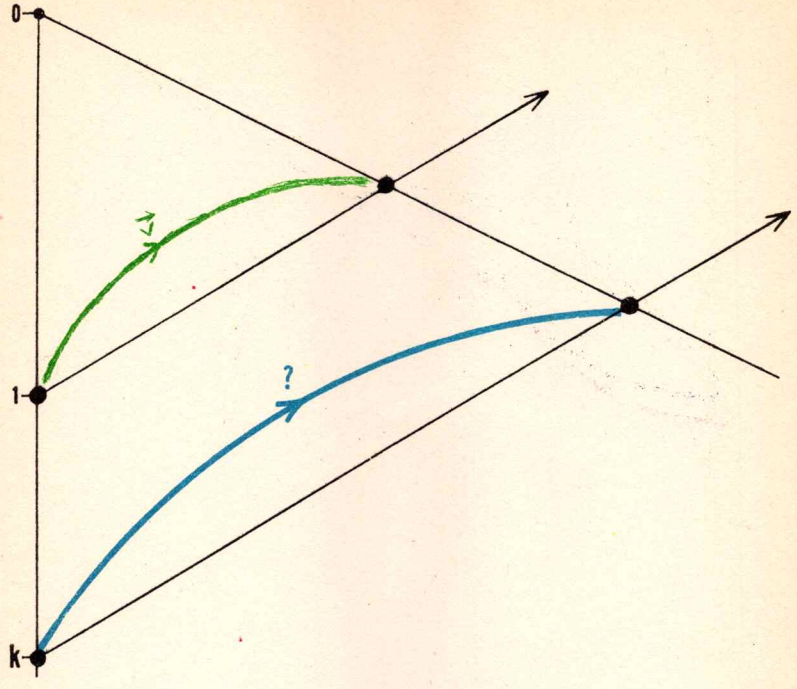
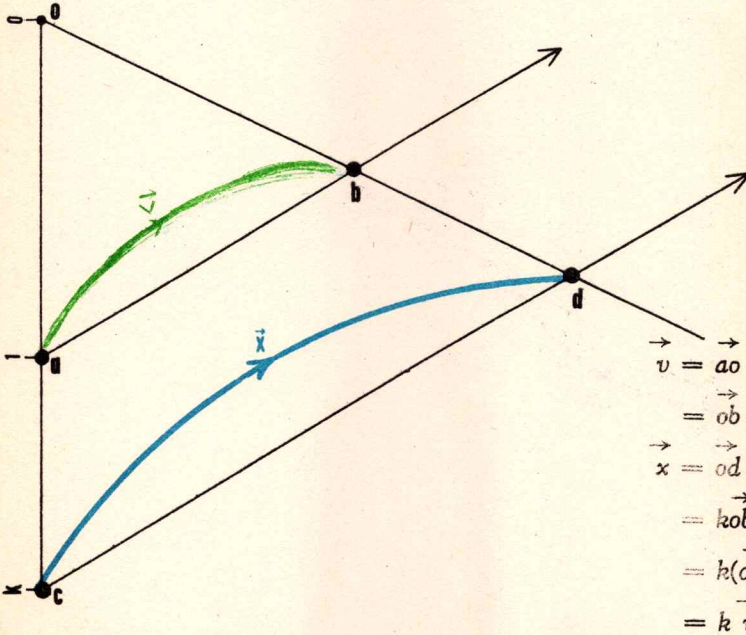


FIG. 255



$$\vec{v} = \vec{ao} + \vec{ob}$$
$$= \vec{ob} - \vec{oa}$$
$$\vec{x} = \vec{od} - \vec{oc}$$
$$= k\vec{ob} - k\vec{oa}$$
$$= k(\vec{ob} - \vec{oa})$$
$$= k\,\vec{v}$$

FIG. 256

28.

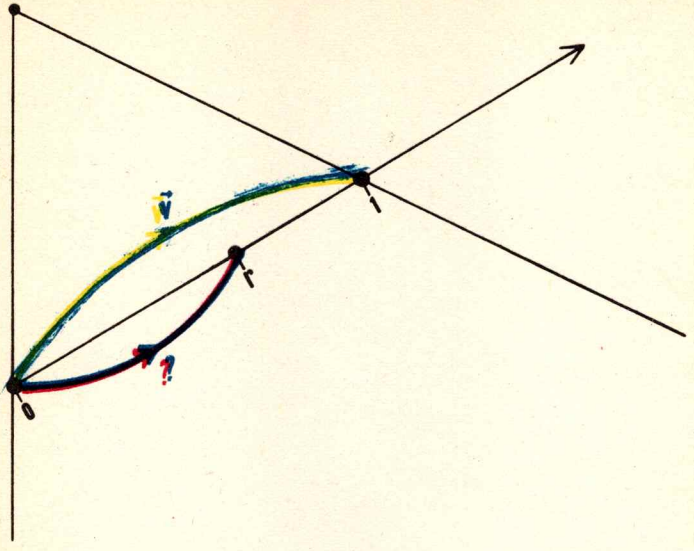


FIG. 257

29.

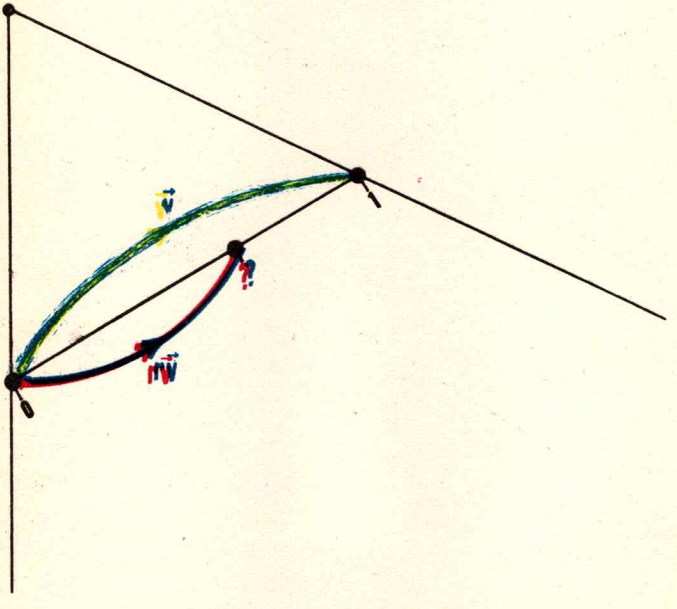


FIG. 258

30.

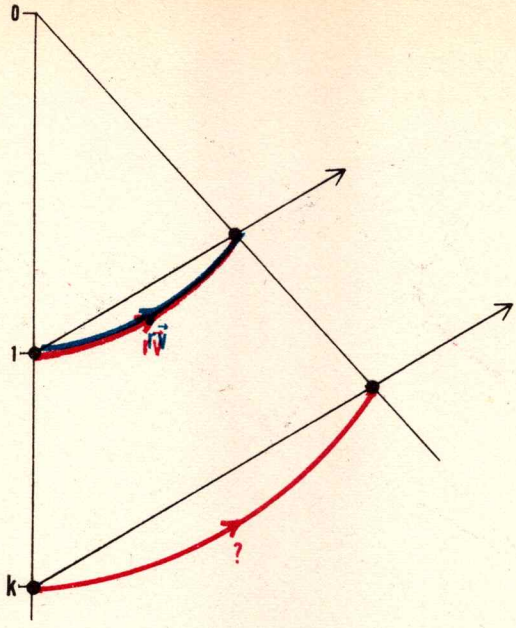


FIG. 259

31. Para todo $r, k \in \mathbf{R}$ y $\vec{v} \in \mathrm{V}$:

$$k\, r\, \vec{v} = r\, k\, \vec{v}$$

32.

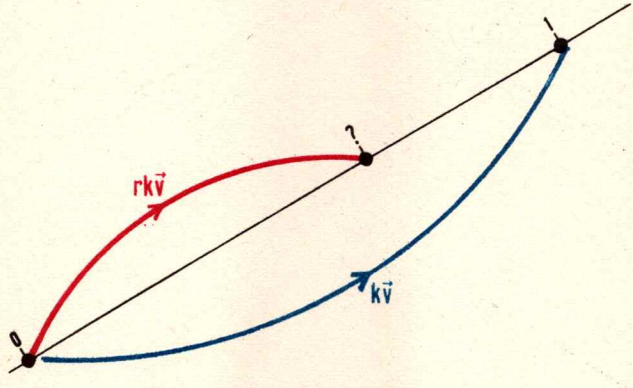


FIG. 260

33.

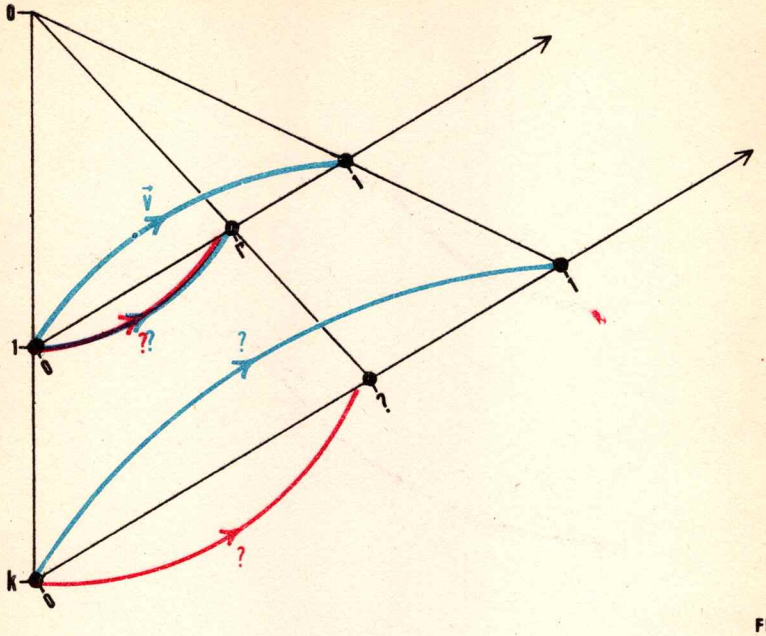


FIG. 261

34.

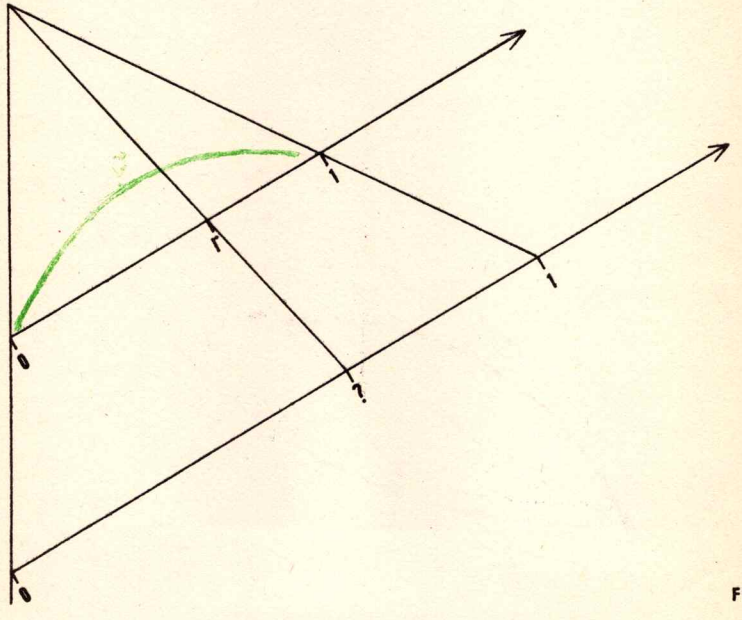


FIG. 262

35. Si la homotecia h aplica la recta A sobre la recta B y la referencia de A_{01} sobre la de B_{01}

Entonces h respeta las abscisas.

36.

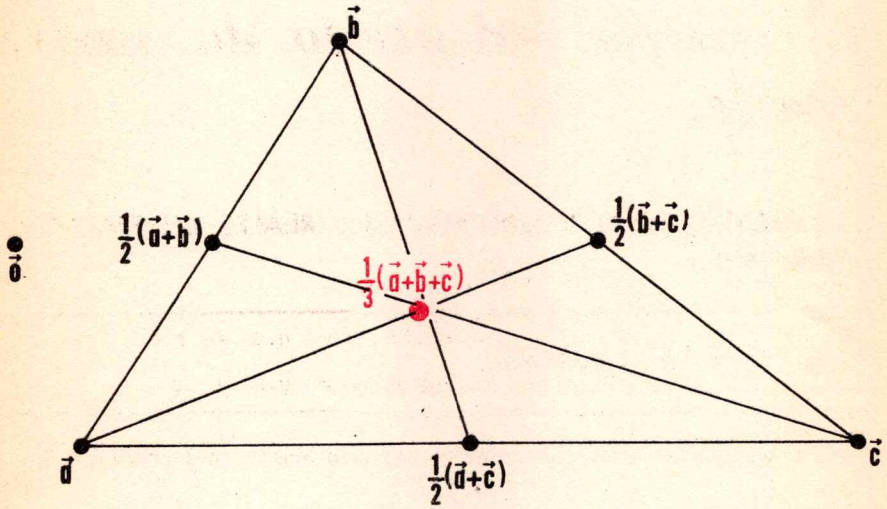


FIG. 263

37.

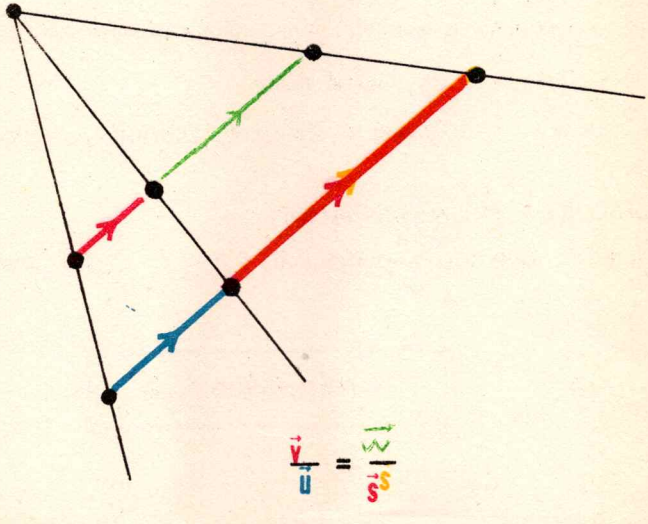


FIG. 264

12

El cuerpo ordenado de números reales

1 — LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES DISTRIBUYE LA ADICIÓN

Si $a, b, c \in \mathbf{R}$, **Entonces** $\begin{cases} (a+b).c = a.c + b.c \\ a.(b+c) = a.b + a.c \end{cases}$

Como la multiplicación es conmutativa, basta establecer la primera fórmula.

DEMOSTRACIÓN:

He aquí un vector no nulo e

$((a+b)\,.\,c)\,\vec{e}$

$= (a+b)\,(c\,\vec{e})$ asociatividad mixta

$= a(c\,\vec{e}) + b(c\,\vec{e})$ la multiplicación escalar distribuye la adición de reales

$= (ac)\vec{e} + (bc)\vec{e}$ asociatividad mixta

$= (ac + bc)\vec{e}$ la multiplicación escalar distribuye la adición de reales.

Luego $((a+b).c)\,\vec{e} = (ac+bc)\,\vec{e}$

de donde $(a+b).c = a.c + b.c$ (puesto que $\vec{e} \neq \vec{0}$)

l.q.q.d.

Brevemente: ● **distribuye** +

2 — REGLA DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN DE REALES

Si $a, b \in \mathbf{R}$, **Entonces** $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$
$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

DEMOSTRACIÓN:

1) $a.(-b) + a.b$

$= a.(-b + b)$ • distribuye $+$

$= a \cdot 0$ Cálculo en $\mathbf{R}$, $+$

$= 0$ 0 es absorbente para la multiplicación de reales.

Así $a.(-b) + a.b = 0$, de donde $a.(-b) = -(a.b)$

2) $(-a) \cdot b = b \cdot (-a)$ la multiplicación de reales es conmutativa

$= -(b.a)$ nº 1

$= -(a.b)$ la multiplicación de reales es conmutativa.

3) $(-a) \cdot (-b)$

$= -(a \cdot (-b))$ en virtud del nº 2

$= -(-(a.b))$ en virtud del nº 1

$= a \cdot b$ cálculo en $\mathbf{R}$, $+$

l.q.q.d.

En particular, para todo $r \in \mathbf{R}$:

$$(-1) \cdot r = -(1 \cdot r) = -r = -(r \cdot 1) = r \cdot (-1)$$

Para todo $r \in R$: $(-1) \cdot r = -r = r \cdot (-1)$

Convención: Como para todo $a, b \in \mathbf{R}$, $(-a) \cdot b = -(a.b) = a \cdot (-b)$, se pondrá $-ab = (-a) \cdot b = -(a.b) = a \cdot (-b)$

3 — INVERSO Y OPUESTO

Si $r \in \mathbf{R}_o$	Entonces $(-r)^{-1} = -(r^{-1})$

DEMOSTRACIÓN:

Para todo $r \in \mathbf{R}_o$: $\quad r \cdot r^{-1} = 1$

Luego $\quad (-r) \cdot (-(r^{-1})) = 1 \quad$ y $\quad -(r^{-1}) = (-r)^{-1}$

l.q.q.d.

Recordemos que para todo $r \in \mathbf{R}$, el número $-r$ se llama el opuesto de r; para todo $r \in \mathbf{R}_o$, el número r^{-1} se llama el inverso de r.

Para todo real no nulo r:

El inverso del opuesto es igual al opuesto del inverso

Convención: Como para todo $r \in \mathbf{R}_o$: $(-r)^{-1} = -(r^{-1})$

se pondrá $\quad -r^{-1} = (-r)^{-1} = -(r^{-1})$

Las aplicaciones $\quad \mathbf{R}_o \to \mathbf{R}_o : x \to -x$

y $\quad \mathbf{R}_o \to \mathbf{R}_o : x \to x^{-1}$

son **permutaciones** de $\mathbf{R}_o$

$\mathbf{R}_o \to \mathbf{R}_o : x \to -x$

$\mathbf{R}_o \to \mathbf{R}_o : x \to x^{-1}$

EL INVERSO DEL OPUESTO
ES IGUAL A
EL OPUESTO DEL INVERSO

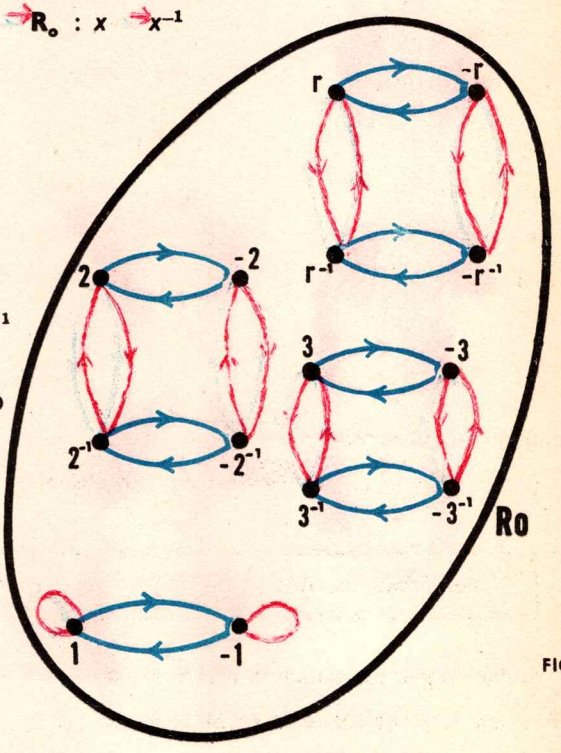


FIG. 265

4 — FRACCIONES Y OPUESTOS

Para todo $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}_0$

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

DEMOSTRACIÓN:

1º)

$$-\frac{a}{b}$$

$$= -(a \cdot b^{-1})$$

$= (-a) \cdot b^{-1}$ — Regla de los signos — $= a \cdot (-(b^{-1}))$

§ 3 — $= a \cdot (-b)^{-1}$

$= \frac{-a}{b}$ — Definición de fracciones — $= \frac{a}{-b}$

Aplicando estos resultados, se obtiene

2º) $\frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$ l.q.q.d.

5 — LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES DISTRIBUYE LA SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS REALES

Si $a, b, c \in \mathbf{R}$, **Entonces** $\begin{cases} a.(b-c) = a.b - a.c \\ (a-b).c = a.c - b.c \end{cases}$

Como la multiplicación es conmutativa, basta probar la primera fórmula.

DEMOSTRACIÓN:

$a.(b-c)$

$= a.(b + (-c))$ Definición de la sustracción de números reales.

$= a.b + a.(-c)$ • distribuye +

$= a.b + (-ac)$ Regla de los signos.

$= a.b - a.c$ Definición de la sustracción.

Brevemente, **• distribuye —**

6 — R, +, · ES UN CUERPO

El conjunto **R** provisto de las leyes + y · se anotará **R, +, ·**

La notación **R, +, ·** recuerda pues que

Si $a, b \in \mathbf{R}$, **Entonces** $a + b \in \mathbf{R}$ y $a \cdot b \in \mathbf{R}$

Reunamos ciertas propiedades esenciales de la **estructura R, +, ·**

Propiedades de **R, +, ·**

1) **R, +** es un grupo conmutativo

2) $\mathbf{R}_o$, · es un grupo conmutativo

3) · distribuye +

Se expresa brevemente que **R, +, ·** verifica las tres condiciones indicadas diciendo que

R, +, · es un cuerpo

DEFINICIÓN

K, +, · *es un* cuerpo

ssi

1) **K, +** *es un grupo conmutativo en el cual* **o** *es el neutro*

2) $\mathbf{K} \setminus \{o\}$, · *es un grupo conmutativo*

3) · *distribuye* +

Sabemos que en **R, +, ·**

1) 0 es absorbente para la multiplicación.
2) La multiplicación es asociativa y conmutativa.

Por si ello te interesa, probaremos que sucede lo mismo en todo cuerpo.

PROPOSICIÓN 1

En todo cuerpo **K, +, ·**
la multiplicación es asociativa y conmutativa y admite **o** *como absorbente*

DEMOSTRACIÓN:

He aquí $a, b, c \in K$

1º) $a.o = a.(o + o)$ (1)

$= a.o + a.o$ (3)

Luego $a.o = a.o + a.o$

y $a.o = o$ (1)

$o.a = (o + o).a$

$= o \cdot a + o \cdot a$

Luego $o.a = o.a + o.a$

y $o.a = o$

2º) Ya sabemos que $a.b = b.a$ y $a.(b.c) = (a.b).c$ cuando ni a, ni b, ni c son nulos.

Si por lo menos uno de los a, b es nulo **Entonces** $a.b = o = b.a$.

Si por lo menos uno de los a, b, c es nulo **Entonces** $(a.b).c = o = a.(b.c)$.

l.q.q.d.

Vuelve a leer la página 338 de MM1 y formula la definición de anillos conmutativos.

DEFINICIÓN

A, +, · es un **anillo conmutativo**

ssi

A , + *es un grupo conmutativo*

La multiplicación · *es asociativa y conmutativa*

· *distribuye* +

En virtud de la proposición 1,

Todo **cuerpo** es un **anillo conmutativo**

EJERCICIOS

1. **Z**, +, · es un anillo conmutativo y no un cuerpo.

2. ω, +, · no es una anillo conmutativo y no es, por lo tanto, un cuerpo

3. $\mathcal{P}E, \Delta, \cap$ verifica las siguientes condiciones:
   a) $\mathcal{P}E, \Delta$ es un grupo conmutativo cuyo neutro es ϕ
   b) $\cap$ distribuye Δ.
   c) La ley $\cap$ es interna, totalmente definida, asociativa, conmutativa, y ϕ es un absorbente para $\cap$.

4. Si consideramos Δ como adición
$\cap$ como multiplicación,
Entonces $\mathcal{G}E, \Delta, \cap$ es un anillo conmutativo y no un cuerpo.

5. Vamos a convertir el conjunto $\{0,1\}$ en un cuerpo proveyéndolo de la adición y la multiplicación definidas por las tablas siguientes:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

6. Todo campo comprende por lo menos dos elementos: 0 y $1 \neq 0$

7. En todo anillo, 0 es un absorbente para la multiplicación.

8. La regla de los signos es válida en todo anillo.

9. Decir que $K, +, \cdot$ es un cuerpo, es decir "muchas cosas". ¿Quieres precisarlas?

DEFINICIÓN

$K, +, \cdot$ es un cuerpo

ssi

Si $a, b, \in K$,		Entonces $a + b \in K$
Si $a, b, c \in K$,		Entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$
Si $a, b \in K$,		Entonces $a + b = b + a$
$0 \in K$ y	Si $a \in K$,	Entonces $a + 0 = a$
Si $a \in K$,		Entonces $-a \in K$ y $-a + a = 0$
Si $a, b \in K_0$,		Entonces $a \cdot b \in K_0$
Si $a, b, c \in K_0$,		Entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b.c)$
Si $a, b \in K_0$,		Entonces $a \cdot b = b \cdot a$
$1 \in K_0$ y	Si $a \in K$,	Entonces $a \cdot 1 = a$
Si $a \in K_0$,		Entonces $a^{-1} \in K_0$ y $a^{-1} \cdot a = 1$
Si $a, b, c \in K$,		Entonces $a \cdot (b + c) = a.b + a.c$

7 — EJERCICIO DE CÁLCULO

En los ejercicios 1 a 56, se podrá suponer indistintamente que las letras designan

1º números reales

2º elementos de un cuerpo K, $+$, $\cdot$

3º elementos de un anillo conmutativo A, $+$, $\cdot$

1. $a \cdot (b + c) = a.b + a.c$

$u \cdot (x + y) =$

$(a + b) \cdot c =$

$(z + u) \cdot d =$

5. $(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d$

$= a.c + b.c + a.d + b.d$

$(x + y) \cdot (u + v) =$

$a \cdot (b + c + d) = a \cdot ((b + c) + d)$

$= a.(b + c) + a \cdot d$

$= ab + ac + ad$

$(x + y + z) \cdot u =$

$(w + a)(x + y + t) =$

10. $(a + b + c + d)(m + n + p) =$

$(a + b)(c + d)(x + y) = ((a + b)(c + d))(x + y)$

$= (ac + bc + ad + bd)(x + y)$

$= acx + bcx + adx + bdx$

$+ acy + bcy + ady + bdy$

$ab + ac = a(b + c)$

$xu + yu = (x + y)u$

$ab + bc =$

15. $ax + ay + az + at =$

$abc + bcd + cdf =$

$(a + b)x + (a + b)y =$

$m(x + y + z) + n(x + y + z) + p(x + y + z) =$

$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$

$= a(x + y) + b(x + y)$

$= (a + b)(x + y)$

20. $um + vm + un + vn =$
$cr + sd + rd + cs =$
$a + b + ma + mb =$
$x + ty + y + tx =$
$a(-b) = -ab$

25. $(-x)\,y = -xy$
$x(-a) = -ax$
$y(-u) =$
$(-x)(-y) = xy$
$(-y)(-a) =$

30. $a \cdot (-b) \cdot c =$
$(-y) \cdot (-z) \cdot t = tyz$
$(-m) \cdot (-n) \cdot (-b) =$
$a.(b - c) = ab - ac$
$(x - y) \cdot u = ux - uy$

35. $(-a)(b - c) =$
$(x - y)(-m) =$
$(a + b)(c - d) =$
$(x - y)(z - t) =$
$a(x - y + z) =$

40. $(a - b - c)(-d) =$
$(-x)(-m + n - p) =$
$(a + b - c)(x - y) =$
$(m - n - p + q)(a - b + c) =$
$(-x)(a - b - c)(-y) =$

45. $(a - b)(c + y + z)(u - t) =$
$xy - xz = x(y - z)$
$mb - nd =$
$rs - st + as - sb =$
$-abcd + bcde - cdef - defg =$

50. $(a - b)\,x + (a - b)\,y =$
$(x + y)\,a - (x + y)\,b =$
$(a - b + c)\,x - (a - b + c)\,y - z\,(a - b + c) =$
$-ax - ay = (-a)(x + y)$
$-bx + by - bz = (-b)(x - y + z)$
$= b(-x + y - z)$

55. $ax - ay + bx - by = (a + b)(x - y)$
$u - v - cv + cu =$

En los ejercicios 57 a 78, las letras designan números reales.

57. $(a + 1)\, m =$
$2\,(m + w) =$
$(x + 1)\,(y + z) =$

60. $(x + 1)\,(y + 2) =$
$(x + y + 1)\, u =$
$(x + 1)\,(y + z + 3) =$
$(a + 1)\,(b + 2)\,(c + 3) =$
$2x + ax + bx =$

65. $m\,(- 1) =$
$2\,(- x) =$
$b\,(- 8) =$
$(- x)\,(- 1) =$
$(- y)\,(- 3) =$

70. $(- a)\, b\,(- 1)\,(- x) =$
$(1 - x)\, m =$
$(- 2 + x)\,(- 5) =$
$(x - 1)\,(y + 2) =$
$(1 - t)\,(3 - u) =$

75. $(1 + a)\,(1 + b)\,(1 + c) =$
$(1 - a)\,(1 - b)\,(1 - c) =$
$x - 1 - xy + y =$
$xa - 2x + a - 2y + ay - 2 =$

***

En los ejercicios 79 a 86, $r \in \mathrm{R}$ y $n \in \omega_0$

79. $2r = (1 + 1)\, r = 1.r + 1.r = r + r$

80. $3r = r + r + r$
$nr = r + r + \ldots + r$ (n términos)
$1.r = r$
$0.r = 0$
$(- 1)\, r = - r$

85. $(- 2)\, r = - 2r = - (r + r) = (- r) + (- r) = 2\,(- r)$
$(- n)\, r = - nr = n\,(- r)$

8 — ADICIÓN DE FRACCIONES

1) He aquí $x, y \in \mathbf{R}$ y $d \in \mathbf{R}_o$

¿Quieres calcular

$$\frac{x}{d} + \frac{y}{d} ?$$

— He aquí

$$\frac{x}{d} + \frac{y}{d}$$

$= x.d^{-1} + y.d^{-1}$ Definición de fracciones

$= (x + y) \cdot d^{-1}$ • distribuye +

$= \dfrac{x + y}{d}$ Definición de fracciones

$$\boxed{\frac{x}{d} + \frac{y}{d} = \frac{x + y}{d}} \qquad (1)$$

2) He aquí $a, c \in \mathbf{R}$ y $b, d \in \mathbf{R}_o$

¿Quieres calcular

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} ?$$

— He aquí

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$= \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd}$ C. 10 § 10 (2)

$= \dfrac{ad + bc}{bd}$ (1) más arriba

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}} \qquad (2)$$

EJERCICIOS

Las letras designan números reales.
De acuerdo con nuestra convención general, los denominadores se suponen siempre no nulos.

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=$

$\frac{x}{a}-\frac{y}{a}=\frac{x}{a}+\frac{-y}{a}=\frac{x+(-y)}{a}=\frac{x-y}{a}$

$\frac{7}{a}-\frac{6}{a}=$

5. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=$

$\frac{u}{v}+\frac{1}{v}-\frac{a}{v}=$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$

10. $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=$

$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=$

$\frac{x}{a}+\frac{7}{b}=$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}=\frac{ad+b\,.\,(-c)}{bd}=\frac{ad+(-bc)}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$

$\frac{x}{u}-\frac{y}{v}=$

15. $\frac{m}{t}-\frac{n}{u}=$

$\frac{t}{m}-\frac{u}{n}=$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=$

20. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=$

(¡Atención! Se supone $x \neq -1$)

$\frac{2}{3}-\frac{3}{7}=$

$\frac{2}{9}-\frac{3}{4}=$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=$

25. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} =$

$\frac{a}{bc} + \frac{d}{bf} = \frac{af}{bcf} + \frac{cd}{bcf} =$

$\frac{a}{bc} - \frac{d}{bf} =$

$\frac{11}{12} + \frac{7}{20} =$

$\frac{x}{abc} + \frac{y}{bcd} =$

30. $\frac{a}{60} - \frac{b}{90} =$

$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} =$

$\frac{a}{yz} - \frac{b}{xz} - \frac{c}{xy} =$

35. $\frac{1}{2+3} = \frac{1}{5} \neq \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} =$

$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} =$

(¿Observaste que se supuso $y \neq -x$?)

$1 + \frac{1}{3} =$

$a + \frac{b}{3} =$

40. $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} =$

$\frac{b}{c} - a =$

$2 + \frac{1}{x+y} =$

$\frac{1}{a+b} + \frac{c}{d} =$

$\frac{c}{x+y} - \frac{u}{t} =$

45. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} =$

$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{c+d} =$

$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{c+d} =$

$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{c-d} =$

$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{c+d} =$

50. $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{c+d} =$

$\frac{x}{a-b} + \frac{y}{c-d} =$

$\frac{x+1}{a} + \frac{b}{y-2} =$

$\frac{ax+1}{b} + \frac{a+c}{x+u} =$

$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

55. $1 - \frac{1}{x} =$

$\frac{1}{\frac{1}{x} - 1} =$

9 — EL CUERPO ORDENADO R, $+$, $\cdot$, $\leqslant$

Reunamos algunas propiedades esenciales de R, $+$, $\cdot$, $\leqslant$

Propiedades de R, $+$, $\cdot$, $\leqslant$

1. R, $+$, $\cdot$ es un cuerpo.
2. R, $+$, $\leqslant$ es un grupo conmutativo ordenado.
3. El producto de toda cupla de reales estrictamente positivos es estrictamente positivo.

El conjunto de las proposiciones 1, 2, 3 se expresa diciendo que

R, $+$, $\cdot$, $\leqslant$ es un cuerpo ordenado

¿Quieres leer nuevamente (C. 2, § 7, p. 28) y formular la definición de grupo conmutativo ordenado?

M, $*$, $\leqslant$ es un grupo conmutativo ordenado

ssi

1. M, $*$ es un grupo conmutatio.
2. $\leqslant$ es un orden total.
3. Si $a, b, c \in M$, **Entonces** $a < b \iff a * c < b * c$

PROPOSICIÓN 2

Si $0 < r \in \mathbf{R}$ y $a, b \in \mathbf{R}$	**Si** $0 > r \in \mathbf{R}$ y $a, b \in \mathbf{R}$
Entonces $a < b \implies ra < rb$	**Entonces** $a < b \implies ra > rb$

DEMOSTRACIÓN:

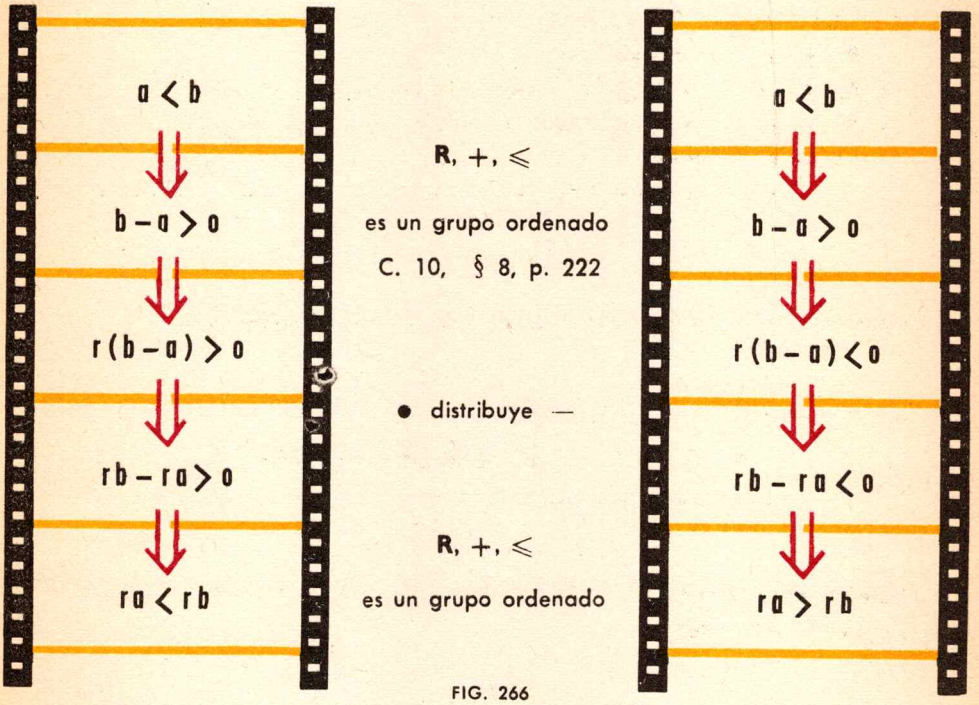


FIG. 266

∴

l.q.q.d.

En el grupo conmutativo $\mathbf{R}_0^+, \cdot$

$$a, b, c \in \mathbf{R}_0^+ \text{ y } a < b \implies ac < bc$$

Como ya sabes, este hecho se expresa diciendo que

$\mathbf{R}_0^+, \cdot, \leqslant$ es un grupo conmutativo ordenado

∴

PROPOSICIÓN 3

Si $a, b, c, d \in \mathbf{R}$

Entonces $0 < a < b$, $0 < c < d$ $\Longrightarrow$ $0 < ac < bd$

DEMOSTRACIÓN:

(prop. 2)

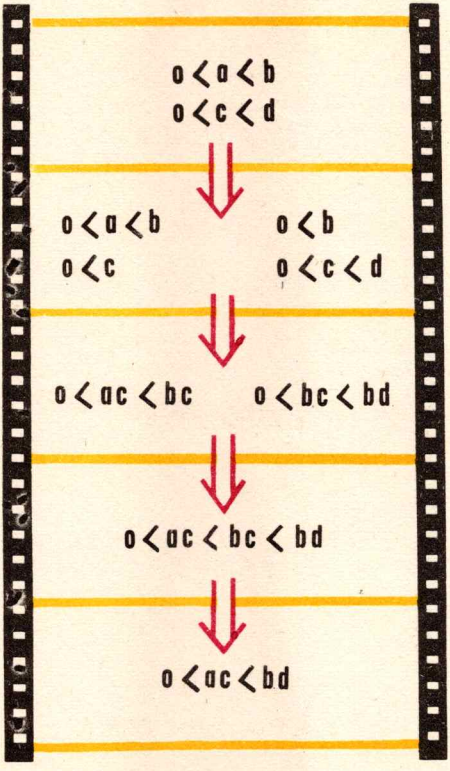


FIG. 267

l.q.q.d.

PROPOSISIÓN 4

Si $a, b \in \mathbf{R}$

Entonces $\boxed{0 < a < b \iff 0 < b^{-1} < a^{-1}}$

DEMOSTRACIÓN:

$0 < a$ y $0 < b \implies 0 < a^{-1}$ y $0 < b^{-1}$ (C. 10, §8)

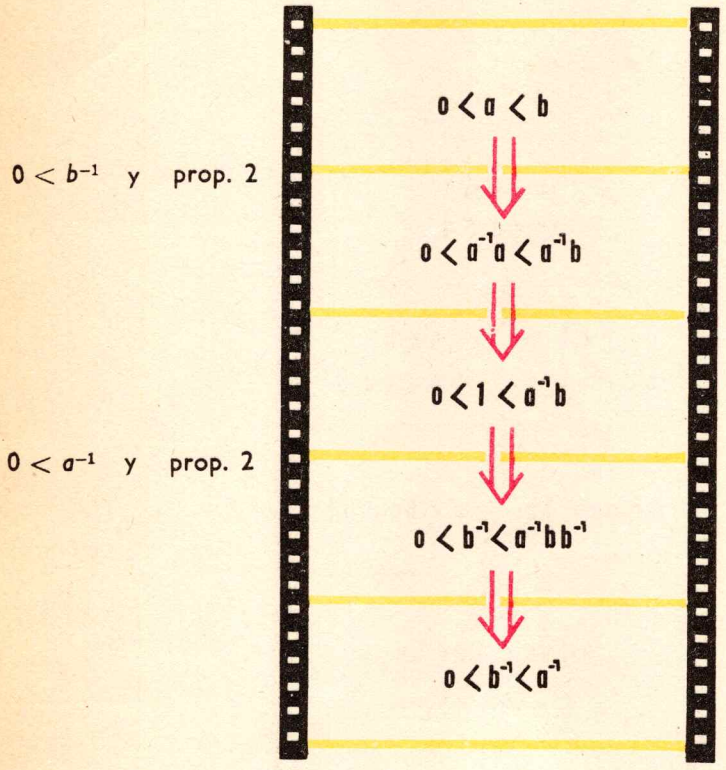


FIG. 268

l.q.q.d.

EJERCICIOS

1. Afirmar que K, $+$, $\cdot$, $\leqslant$ es un cuerpo ordenado es decir "muchas cosas". ¿Quieres enumerarlas?

$K, +, \cdot, \leqslant$ es un cuerpo ordenado

ssi

1) **Si** $a, b \in K$		**Entonces** $a + b \in K$
2) **Si** $a, b, c \in K$		**Entonces** $(a + b) + c = a + (b + c)$
3) **Si** $a, b \in K$		**Entonces** $a + b = b + a$
4) $0 \in K$ y	**Si** $a \in K$	**Entonces** $a + 0 = a$
5) **Si** $a \in K$		**Entonces** $-a \in K$ y $-a + a = 0$
6) **Si** $a, b \in K_0$		**Entonces** $a \cdot b \in K_0$
7) **Si** $a, b, c \in K_0$		**Entonces** $ab \cdot c = a \cdot bc$
8) **Si** $a, b \in K_0$		**Entonces** $a \cdot b = b \cdot a$
9) $1 \in K_0$ y	**Si** $a \in K_0$	**Entonces** $a \cdot 1 = a$
10) **Si** $a \in K_0$		**Entonces** $a^{-1} \in K_0$ y $a^{-1} \cdot a = 1$
11) **Si** $a, b, c \in K$		**Entonces** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
12) **Si** $a, b \in K$		**Entonces** $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$
13) **Si** $a \in K$		**Entonces** $a \leqslant a$
14) **Si** $a, b, c \in K$		**Entonces** $a \leqslant b$ y $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$
15) **Si** $a, b \in K$		**Entonces** $a \leqslant b$ y $b \leqslant a \Rightarrow a = b$
16) **Si** $a, b, c \in K$		**Entonces** $a \leqslant b \iff a + c \leqslant b + c$
17) **Si** $a, b \in K$		**Entonces** $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0 \Rightarrow a \cdot b \geqslant 0$

En los ejercicios siguientes, las letras designan números reales o elementos de un cuerpo ordenado.

2. $0 < a < b$ y $0 < c \Rightarrow 0 < ac < bc$

3. $0 < b$ y $0 < c < d \Rightarrow 0 < bc < bd$

4. $0 < a$ y $0 < b \Rightarrow 0 < a \cdot b$

5. $a < b$ y $0 \leqslant c \Rightarrow ac \leqslant bc$

6. $a \leqslant b$ y $0 < c \Rightarrow ac \leqslant bc$

7. $a \leqslant b$ y $0 \leqslant c \Rightarrow ac \leqslant bc$

8. $0 \leqslant a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow 0 \leqslant ac < bd$

9. $0 < a \leqslant b$ y $0 < c \leqslant d \Rightarrow 0 < ac \leqslant bd$

10. $0 < a \leqslant b$ y $0 < c < d \Rightarrow 0 < ac < bd$

11. $0 \leqslant a \leqslant b$ y $0 < c \leqslant d \Rightarrow 0 \leqslant ac \leqslant bd$

12. $a < b$ y $c < d \Rightarrow ad + bc < ac + bd$

13. $a > b$ y $c > d \Rightarrow ad + bc < ac + bd$

14. $a < b$ y $c > d \Rightarrow ac + bd < ad + bc$

15. $a > b$ y $c < d \Rightarrow ac + bd < ad + bc$

16. $(a < b$ y $c < d)$ o $(a > b$ y $c > d) \iff ad + bc < ac + bd$

17. $(a < b$ y $d < c)$ o $(b < a$ y $c < d) \iff ac + bd < ad + bc$

18. $0 < a \leqslant b \iff 0 < b^{-1} \leqslant a^{-1}$

19. $a < b < 0 \iff 0 < -b < -a \iff 0 < -a^{-1} < -b^{-1} \iff b^{-1} < a^{-1} < 0$

20. He aquí reales no nulos tales que $a < b$

$$0 < a < b \iff 0 < b^{-1} < a^{-1}$$
$$a < 0 < b \iff a^{-1} < 0 < b^{-1}$$
$$a < b < 0 \iff b^{-1} < a^{-1} < 0$$

21. Para todo real a :

$$0 < 1 < a$$
$$\Downarrow$$
$$a < a^2$$
$$\Downarrow$$
$$a^2 < a^3$$
$$\Downarrow$$
$$\text{etc.}$$

22. Para todo real a : $0 < a < 1$ implica $1 > a > a^2 > a^3 > \ldots > 0$

23. Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $a < b$,

Entonces $a < \dfrac{a+b}{2} < b$

24. Si $0 < p \in \mathbf{R}$ y $a, b, c \in \mathbf{R}$

Entonces $a < b < c \Rightarrow a/p < b/p < c/p$

25. Si $z \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{R}$, $0 < b \in \mathbf{R}$,

Entonces $zb < a < (z+1)\,b \Rightarrow z < a/b < z + 1$

10 — FRACCIONES Y ORDEN

Para todo $a, c \in \mathbf{R}$ y $b, d \in \mathbf{R}_0^+$: $\quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$

DEMOSTRACIÓN:

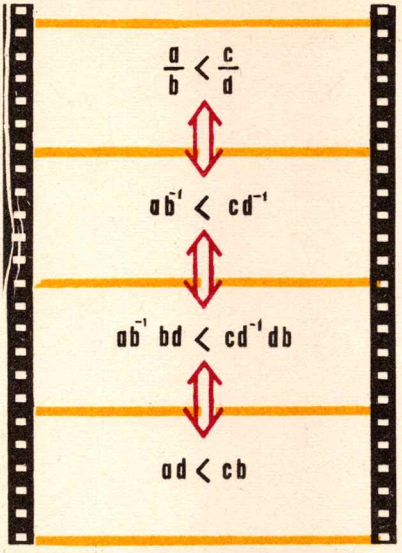


FIG. 269

l.q.q.d.

Ya sabíamos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

Luego

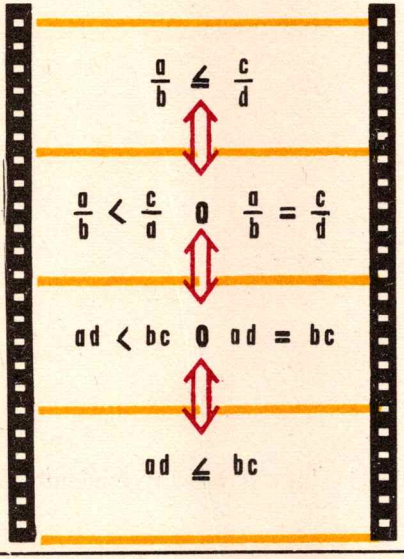


FIG. 270

Para todo $a, c \in \mathbf{R}$ y $b, d, \in \mathbf{R}_0^+$: $\quad \frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \iff ad \leqslant bc$

11 — EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 6, las letras designan reales.

1. $ab - c(x + y) = ab - (cx + cy)$
$= ab - cx - cy$

2. $xy - (a + b)c =$

3. $ab - (x - y)z =$

4. $a(b - c) - b(a + c) =$

5. $(a + b)c - (x + y)(u - v) =$

6. $(a + b)(c - d) - (a - d)(b + c) =$

En los ejercicios 7 a 11, las letras designan elementos de un grupo G, $*$. Como de costumbre, ν designa el neutro de este grupo, mientras que el simétrico de todo $g \in G$ se anota $\bar{g}$.

7. $(a * b) * (\bar{b} * \bar{a}) = \nu$.
Luego $\overline{a * b} = \bar{b} * \bar{a}$.

8. $\overline{a * b * c} = \bar{c} * \bar{b} * \bar{a}$.

9. $\overline{a * b * \ldots * h * k} = \bar{k} * \bar{h} * \ldots * \bar{b} * \bar{a}$

10. $\overline{a * \bar{b}} = b * \bar{a}$

11. $\overline{\bar{a} * b * \bar{c}} =$

En los ejercicios 12 a 18, las letras designan elementos de un grupo **conmutativo** G, $*$

12. En el grupo conmutativo G, $*$ las fórmulas establecidas en los ejercicios 7 a 11 continúan siendo válidas.

13. En virtud de la asociatividad y conmutatividad de la ley $*$,

$$\bar{b} * \bar{a} = \bar{a} * \bar{b}$$

$$\bar{c} * \bar{b} * \bar{a} = \bar{a} * \bar{b} * \bar{c}$$

$$\bar{k} * \bar{h} * \ldots * \bar{b} * \bar{a} = \bar{a} * \bar{b} * \ldots * \bar{h} * \bar{k}$$

$$b * \bar{a} = \bar{a} * b$$

14. $\overline{a * b} = \bar{a} * \bar{b}$ **15.** $\overline{a * b * c} = \bar{a} * \bar{b} * \bar{c}$

16. $\overline{a * b * \ldots * h * k} = \bar{a} * \bar{b} * \ldots * \bar{h} * \bar{k}$

17. $\overline{a * \bar{b}} = \bar{a} * b$ **18.** $\overline{\bar{a} * b * \bar{c}} =$

19.

En $\mathbf{R}$, $+$	En $\mathbf{R}_0$, $\cdot$	En un grupo conmutativo G, $*$
$-(a+b)$ $= -a-b$	$(a \,.\, b)^{-1}$ $= a^{-1} \,.\, b^{-1}$	$\overline{a * b}$ $= \bar{a} * \bar{b}$
$-(a+b+c)$ $= -a-b-c$	$(abc)^{-1}$ $= a^{-1}b^{-1}c^{-1}$	$\overline{a * b * c}$ $= \bar{a} * \bar{b} * \bar{c}$
$-(a+b+\ldots+k)$ $= -a-b-\ldots-k$	$(ab \ldots k)^{-1}$ $= a^{-1}b^{-1} \ldots k^{-1}$	$\overline{a * b * \ldots * k}$ $= \bar{a} * \bar{b} * \ldots * \bar{k}$
$-(a-b)$ $= -a+b$	$(ab^{-1})^{-1}$ $= a^{-1}b$	$\overline{a * \bar{b}}$ $= \bar{a} * b$
$-(-a+b-c)$ $= a-b+c$	$(a^{-1}bc^{-1})^{-1}$ $= ab^{-1}c$	$\overline{\bar{a} * b * \bar{c}}$ $= a * \bar{b} * c$
$(a+b)-(c-d)$ $= a+b-c+d$	$(ab) \,.\, (cd^{-1})^{-1}$ $= abc^{-1}d$	$(a * b) * \overline{(c * \bar{d})}$ $= a * b * \bar{c} * d$

20. En un grupo G, $*$ del cual no se nos dice si es conmutativo o no,

$$(a * b) * \overline{(c * \bar{d})} = a * b * d * \bar{c}$$

He aquí algunos ejercicios ocasionales sobre los grupos (21 a 29)

21. Toma nuevamente la figura p. 264.
Allí se representan esquemáticamente dos permutaciones de R_0 que anotaremos claramente ● y ●

La proposición "el inverso del opuesto es igual al opuesto del inverso" se traduce en la fórmula ● o ● = ● o ●

¿Quieres dibujar la permutación ● = ● o ● = ● o ●

Representa en negro la permutación idéntica ● de R_0

Observa que ● o ● = ● o ● = ● o ● = ●
lo cual te permite dar la tabla de composición

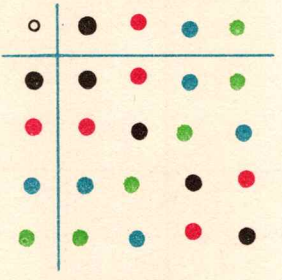


FIG. 271

El conjunto de estas cuatro permutaciones de R_0

{ ●, ●, ●, ● }

es un grupo conmutativo para la composición.

22. He aquí cuatro objetos distintos *a*, *b*, *c*, *d*

El conjunto E = {*a*, *b*, *c*, *d*} { ●, ●, ●, ● } de las cuatro permutaciones de que representamos a continuación

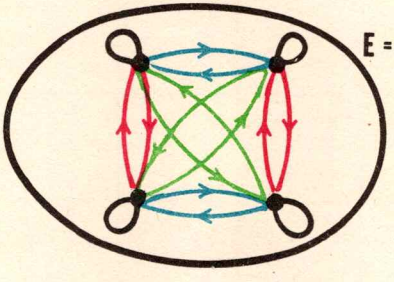


FIG. 272

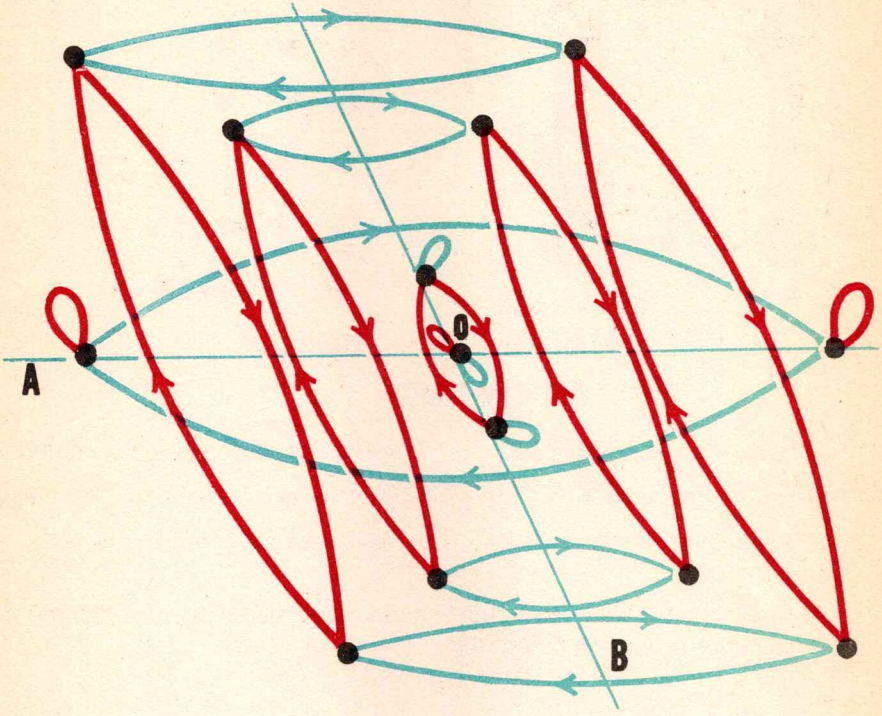
EL GRUPO { ●, ●, ●, ● }, o

es un grupo conmutativo para la composición.
Con las anotaciones que hemos utilizado, esta tabla de composición es la misma que la que encontramos en el ejercicio anterior.
Los dos grupos en cuestión son isomorfos.

23. He aquí las rectas $A \# B$ y $\{o\} = A \cap B$.

Dibuja en rojo algunas flechas de la simetría de eje A, paralela a B.

Dibuja en azul algunas flechas de la simetría de eje B, paralela a A.



ALGUNAS FLECHAS DE LA SIMETRÍA ● DE EJE A, PARALELA A B

Y DE LA SIMETRÍA ● DE EJE B, PARALELA A A

FIG. 273

Establece que ● o ● = ● o ● = ●

es la simetría de centro o

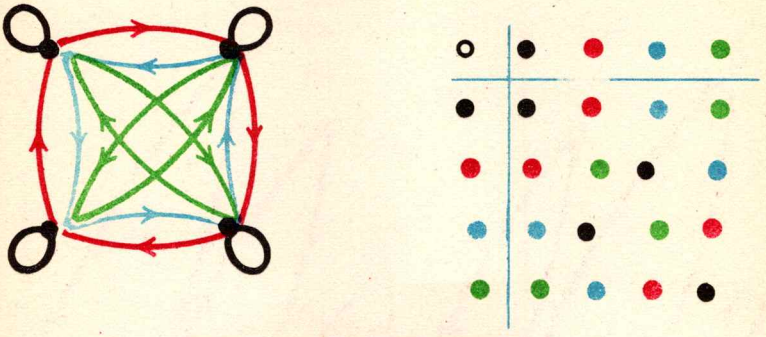
Si ● = I_π ,

Entonces ● o ● = ● o ● = ● o ● = ●

De ahí resulta en seguida que el conjunto $\{ ●, ●, ●, ● \}$ es un grupo para la composición, isomorfo al grupo encontrado en los ejercicios 21 y 22.

24. Todo grupo isomorfo a los grupos de los ejercicios 21 a 23 se llama grupo de Klein.

¿Quieres construir un grupo de cuatro elementos que no sea un grupo de Klein?



GRUPO CÍCLICO DE ORDEN 4

FIG. 274

25. Todo grupo de cuatro elementos es un grupo cíclico o un grupo de Klein.

26. Todo grupo que comprende uno, dos, tres o cinco elementos es cíclico.

27. Todo grupo que comprende uno, dos, tres, cuatro o cinco elementos es conmutativo.

28. El grupo de permutaciones de un conjunto de tres elementos, comprende seis elementos y no es conmutativo.
(Ver MM1, C. 22, § 3, ejercicio 7, p. 391)

29. Si $a \neq b$,

Entonces $\mathcal{P}\ \{a, b\}, \Delta$ es un grupo de Klein.

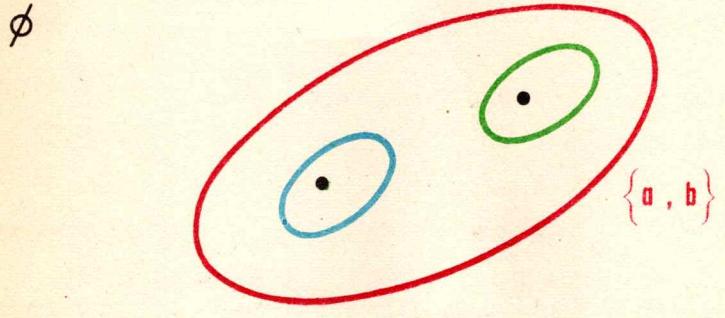


FIG. 275

30. El conjunto **R** de reales es un grupo para la adición: $\mathbf{R}, +$
El conjunto $\mathbf{R}_0$ de reales no nulos es un grupo para la multiplicación: $\mathbf{R}_0, \cdot$
El conjunto $\mathfrak{S}E$ de permutaciones del conjunto E es un grupo para la composición: $\mathfrak{S}E, \circ$
Y he aquí un grupo $G, *$ y $z \in Z$

Diccionario

$\mathbf{R}, +$	$\mathbf{R}_0, \cdot$	$\mathfrak{S}E, \circ$	$G, *$
$+$	$\cdot$	$\circ$	$*$
adición	multiplicación	composición	ley interna
$a + b$	$a \,.\, b$	$a \circ b$	$a * b$
suma de (a, b)	productos de (a, b)	compuesta de (a, b)	resultado de (a, b)
0	1	1_E	v
cero	uno	transformación idéntica de E	neutro
$-a$	a^{-1}	a^{-1}	$\bar{a}$
opuesto de a	inverso de a	recíproca de a	simétrico de a
za	a^z	a^z	$z \perp a$
múltiplo de a	potencia de a	potencia de a	

Define $z \perp a$
Propone un nombre para $z \perp a$.

31. Cómo calcular rápido y directamente
$s = 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 + 39 + 43 + 47 + 51 + 55.$

Fina astucia:

$$2s = 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 + 39 + 43 + 47 + 51 + 55$$
$$+ 55 + 51 + 47 + 43 + 39 + 35 + 31 + 27 + 23 + 19 + 15 + 11 + 7$$
$$= 62 + 62 + 62 + 62 + 62 + 62 + 62 + 62 + 62 + 62 + 62 + 62 + 62.$$

$$2s = \underset{\substack{\text{número}\\ \text{de términos}}}{13} \times \Big(\underset{\substack{\text{primer}\\ \text{término}\\ \text{de la sucesión}}}{7} + \underset{\substack{\text{último}\\ \text{término}\\ \text{de la sucesión}}}{55} \Big)$$

$$s = \frac{13 \times (7 + 55)}{2}$$

32. Ejercitémonos. Gracias a esta fina astucia, calculemos rápida y directamente.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \therefore + 1.000.000 = 500.000.500.000$$

$$-45 - 40 - 35 - 30 - 25 - 20 - 15 - 10 - 5 - 0 =$$
$$+ 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 0$$

$$-7 - 4 - 1 + 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 45$$

33. Generalicemos

He aquí un natural $n \geqslant 2$ y los reales p, r

Calcula la suma s de la sucesión de n términos

$$p \ , \ p+r \ , \ p+2r \ \ldots . \ , \ p+(n-1)r=d$$

Gracias a la fina astucia:

$$2s = n\,(p+d) \text{ de donde } \boxed{s = \frac{n\,(p+d)}{2}}$$

34. Una sucesión de números reales tales que

$$a, \ a + r, \ \ a + 2r, \qquad \ldots \qquad , \ a + (n - 1)\, r,$$

se dice **lineal**

a es el primer término de la sucesión

$a + (n - 1)\, r$ es el enésimo término de la sucesión

r suele llamarse *razón* de la sucesión

35. ¿Cuál es la suma s de la sucesión lineal de n términos, cuyo primer término es a y la razón es r?

$$s = na + \frac{n\,(n-1)}{2}\, r$$

36. ¿Quieres calcular la suma de los n primeros números naturales pares (no nulos)?

$$2 + 4 + \ldots + 2n$$

(Respuesta: $n\,(n + 1)$)

37. $5 + 10 + \ldots + 5n = \dfrac{5n\,(n+1)}{2}$

38. ¿Quieres calcular la suma de los n primeros números naturales impares?

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$$

(Respuesta n^2).

39. **Si** $a, b, c, d, m \in \mathbf{R}_o^+$

Entonces

$$0 < \frac{a}{b} < 1 < \frac{c}{d}$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} < 1 < \frac{c+m}{d+m} < \frac{c}{d}$$

13

En el cuerpo ordenado de los números reales

1 — POTENCIAS

1º Potencias con exponentes naturales

— He aquí $r \in \mathbf{R}$
¿Cómo propondrías anotar r^2, r^3, r^5, r^1 ?

$r^2 = r \cdot r$
$r^3 = r \cdot r \cdot r$
$r^5 = r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r$
$r^1 = r$

Para todo $r \in \mathbf{R}$ y $n \in \omega_o$: $r^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ factores}}$

— He aquí $a, r \in \mathbf{R}$ y $n \in \omega_o$
Se puede calcular ar^n multiplicando a sucesivamente por n factores r

— ¿Cuál es el producto de a por 0 factores r?

— Es aún a

— Multiplicar por 0 factor r, es multiplicar por 1

Definiremos pues

Para todo $r \in \mathbf{R}$: $r^0 = 1$

2º Si $r \in \mathbf{R}_o$ y $n \in \omega$,

Entonces $r^n \neq 0$

— ¿Quieres calcular el inverso de r^n cuando $n \neq 0$

— He aquí el cálculo

$$(r^n)^{-1}$$

$$= \underbrace{(r \cdot r \cdot \ldots \cdot r)^{-1}}_{n \text{ factores}} \qquad \text{Definición nº 1}$$

$$= \underbrace{r^{-1} \cdot r^{-1} \cdot \ldots \cdot r^{-1}}_{n \text{ factores}} \qquad \text{(C. 10, § 6, prop. 1, p. 220)}$$

$$= (r^{-1})^n \qquad \text{Definición nº 1}$$

Si $n = 0$, **Entonces** $(r^0)^{-1} = 1 = (r^{-1})^0$

Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ y $n \in \omega$: $(r^n)^{-1} = (r^{-1})^n$

3º Potencias con exponentes enteros racionales

DEFINICIÓN

Para todo $n \in \omega_o$

Si $r \in \mathbf{R}$, **Entonces** $r^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ factores}}$ y $r^0 = 1$

Si $r \in \mathbf{R}_o$, **Entonces** $r^{-n} = (r^{-1})^n = (r^n)^{-1}$

Para todo $r \in \mathbf{R}$ y $z \in \mathbf{Z}$,

r^2 se llama **cuadrado** de r

r^3 se llama **cubo** de r

r^z se llama **ezésima potencia** de r

z se llama **exponente** y r **base** de la potencia r^z
(r^z se lee "r exponente z" o bien "r a la z")

EJERCICIOS

1.

$5^2 = 25 = (-5)^2$ $\quad 5^3 = 125$ $\quad (-5)^3 = -125$

$18^2 = 324 = (-18)^2$ $\quad 18^3 = 5832$ $\quad (-18)^3 = -5832$

$0^2 = 0$ $\quad 0^3 = 0$

$5^{-2} = 25^{-1} = 1/25$ $\quad 5^{-3} = 125^{-1} = 1/125$

$18^{-2} =$ $\quad (-5)^{-3} = (-125)^{-1} = -1/125$

$18^{-3} =$ $\quad 10^{-2} = 1/100 = 0{,}01$

$(-18)^{-2} =$ $\quad 10^{-5} = 1/100000 = 0{,}00001$

2. Para todo $r \in \mathbf{R}$: $(-r)^2 = r^2 \in \mathbf{R}^+$
Para todo $r \in \mathbf{R}$: $(-r)^3 = -r^3$

3. No existe ningún real r tal que $r^2 = -1$

4. Para todo $r \in \mathbf{R}_o^-$: $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = r\} = \phi$

5. $0^0 = 1$

6. Si $n \in \omega_o$, Entonces $0^n = 0$

7. Si $n \in \omega_o$ y $r \in \mathbf{R}$, Entonces $r^n = 0 \Rightarrow r = 0$

8.
$2 \times 0 = 0 + 0 = 0$
$3 \times 0 = 0$
$1.287.383 \times 0 = 0$
$(-25) \times 0 = 0$

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$
$1^3 = 1$
$1^{1.287.383} = 1$
$1^{-25} = (1)^{-251} = 1^{-1} = 1$

9. Para todo $z \in \mathbf{Z}$: $1^z = 1$

10.
$(-1)^{1.287.383} =$
$(-1)^{24} =$
$(-1)^0 =$

$(-1)^{-1} =$
$(-1)^{-24} =$
$(-1)^{-17} =$

11. Para todo $z \in \mathbf{Z}$: $(-1)^{2z} = 1$ y $(-1)^{2z+1} = -1$.

12. Si $r \in \mathbf{R}$ y $n \in \omega$

Entonces
$(-r)^2 = (-r) \cdot (-r) = r^2$
$(-r)^3 = (-r) \cdot (-r)(-r) = -r^3$
$(-r)^{89} = -r^{89}$ $\qquad$ $(-r)^{2n} = r^{2n}$
$(-r)^{212} = r^{212}$ $\qquad$ $(-r)^{2n+1} = -r^{2n+1}$

13. Si $r \in \mathbf{R}_o$,

Entonces
$(-r)^{-2} = ((-r)^2)^{-1} = (r^2)^{-1} = r^{-2}$
$(-r)^{-1} = -r^{-1}$
$(-r)^{-3} = ((-r)^3)^{-1} = (-r^3)^{-1} = -(r^3)^{-1} = -r^{-3}$
$(-r)^{-89} = -r^{-89}$
$(-r)^{-212} = r^{-212}$

14. Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ y para todo $z \in \mathbf{Z}$:

$(-r)^{2z} = r^{2z}$

$(-r)^{2z+1} = -r^{2z+1}$

15. Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ y todo $n \in \omega$:

$$r^n \cdot r^{-n} = 1$$

16. Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ y todo $z \in \mathbf{Z}$:

$$r^z \cdot r^{-z} = 1 = r^{-z} \cdot r^z$$

17. Si $a, b \in \mathbf{R}$; $c \in \mathbf{R}_o$; $z \in \mathbf{Z}$,

Entonces $ac^z = b \iff a = bc^{-z}$

18. Para todo $r \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}_o$ y $z \in \mathbf{Z}$:

$$a^z \cdot r = 1 \iff r = a^{-z}$$

19. $2^1 = 2 \neq 1 = 1^2$

$(2^1)^2 = 2^2 = 4 \neq 2 = 2^1 = 2^{(1^2)}$

$2^1 \neq 1^2$; $(2^1)^2 \neq 2^{(1^2)}$

20. La ley $\mathbf{Z}_o \times \mathbf{Z}_o \to \mathbf{R} : (z, t) \to z^t$
no es conmutativa.

La ley $\mathbf{R}_o \times \mathbf{Z} \to \mathbf{R} : (r, z) \to r^z$
no es asociativa.

En los ejercicios siguientes 24 a 39, las letras designan reales

21. $(x + 2) \cdot x = x \cdot x + 2x = x^2 + 2x$

$(x + a)\, x = x^2 + ax$

$x\,(x + b) =$

$x\,(x - c) =$

25. $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$

$(x - 2)(x + 3) =$

$(x - 2)(x - 3) =$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\, x + ab$

$ax\,(bx + c) = abx^2 + acx$

30. $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + bcx + adx + bd$
$= acx^2 + (bc + ad)x + bd$

$(2x - 3)(7x - 8) =$
$(2ax - 3b)(7cx - d) =$
$(9x^3 + 2x^2 - 5x + 6) - (9x^2 - 5) =$
$(ax^2 + bx + c)x =$

35. $(ax^2 - bx + c)dx =$
$(ax^2 + 2x - c)(x + 1) =$
$(ax^2 + 5)(7x^2 - 3) =$
$(5x^2 - 3x + 2)(3x^2 - 7x + 1) =$
$(x + 1)(x - 2)(x + 3) =$

En los ejercicios 40 a 46

$a, b \in R_0$; $n \in \omega_0$; $z \in Z$

40. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^1}{b^1}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{17} =$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^{-1} = \left(\frac{a^n}{b^n}\right)^{-1} = \frac{b^n}{a^n}$

$= \frac{(a^n)^{-1}}{(b^n)^{-1}} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$

45. $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^z = \frac{a^z}{b^z}$

47. ¡Contempla, explica, justifica!

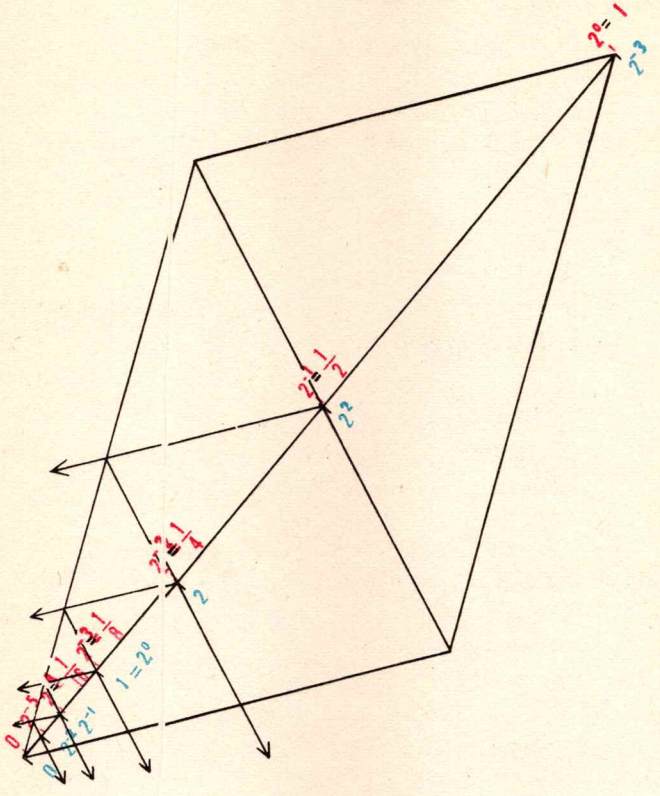


FIG. 276

48. He aquí los número s reales $x, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3$

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)$$
$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\,x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\,x^2$$
$$+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)\,x^3 + (a_1b_3 + a_2b_2)\,x^4 + a_2b_3x^5$$

2 — PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS (Exponentes enteros racionales)

1º Productos de potencias de un número real.

He aquí $r \in \mathbf{R}$

$$r^5 \cdot r^3 = r\,r\,r\,r\,r \cdot r\,r\,r = r\,r\,r\,r\,r\,r\,r\,r = r^{5+3}$$

Para todo $m \in \omega$: $r^m \cdot r^0 = r^m \cdot 1 = r^m = r^{m+0}$

> Para todo $r \in \mathbf{R}$ y $m, n \in \omega$: $\quad r^m \cdot r^n = r^{m+n}$ (1)

He aquí $a \in \mathbf{R}_o$

$$a^{-4} \cdot a^{-2} = (a^{-1})^4 \cdot (a^{-1})^2 = (a^{-1})^{4+2} = a^{-(4+2)} = a^{(-4)+(-2)}$$

en virtud de (1)

Para todo $m, n \in \omega$:

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = (a^{-1})^m \cdot (a^{-1})^n = (a^{-1})^{m+n} = a^{-(m+n)} = a^{(-m)+(-n)}$$

en virtud de (1)

> Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ et $m, n \in \omega$: $\quad r^{-m} \cdot r^{-n} = r^{(-m)+(-n)}$

$$a^7 \cdot a^{-2} = a\,a\,a\,a\,a\,a\,a \cdot a^{-1}\,a^{-1}$$

$$= a\,a\,a\,a\,a\,a \cdot a\,a^{-1} \cdot a^{-1}$$

$$= a\,a\,a\,a\,a\,a \cdot 1 \cdot a^{-1}$$

$$= a\,a\,a\,a\,a\,a \cdot a^{-1}$$

$$= a\,a\,a\,a\,a \cdot a\,a^{-1}$$

$$= a\,a\,a\,a\,a \cdot 1$$

$$= a\,a\,a\,a\,a = a^{7+(-2)}$$

$$a^3\,a^{-5} = a\,a\,a\,a^{-1}\,a^{-1}\,a^{-1}\,a^{-1}\,a^{-1}$$

$$= a\,a\,a^{-1}\,a^{-1}\,a^{-1}\,a^{-1}$$

$$= a\,a^{-1}\,a^{-1}\,a^{-1}$$

$$= a^{-1}\,a^{-1} = a^{3+(-5)}$$

Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ y $m, n \in \omega$: $= r^m \cdot r^{-n} = r^{m+(-n)}$
$= r^{-n} \cdot r^m = r^{(-n)+m}$

Reunamos los resultados de las tres fórmulas encuadradas.

Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ y $s, t \in \mathbf{Z}$: $r^s \cdot r^t = r^{s+t}$

2º Potencia de una potencia

Si $r \in \mathbf{R}_o$ y $z_1, z_2, \ldots, z_n$ es una sucesión finita de enteros racionales

Entonces la fórmula final de 1º implica

$$r^{z_1} \cdot r^{z_2} \cdot \ldots \cdot r^{z_n} = r^{z_1+z_2+\cdots+z_n}$$

En particular, **si** $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = s$

entonces $(r^s)^n = r^s \cdot r^s \cdot \ldots \cdot r^s = r^{s+s+\ldots+s} = r^{ns}$

Luego, para todo $r \in \mathbf{R}_o$, $s \in \mathbf{Z}$ y $n \in \omega_o$: $(r^s)^n = r^{ns}$ (2)

y $(r^s)^{-n}$

$= ((r^s)^{-1})^n$ Definición de potencias de exponente $-n$

$= (r^{-s})^n$ Puesto que $(r^s)^{-1} = r^{-s}$ en virtud de la misma definición

$= r^{n(-s)}$ Fórmula (2)

$= r^{(-n)s}$ Puesto que $n(-s) = (-n)\,s$ (regla de los signos)

Luego, para todo $r \in \mathbf{R}_o$, $s \in \mathbf{Z}$ y $n \in \omega_o$: $(r^s)^{-n} = r^{(-n)s}$

Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ y $s \in \mathbf{Z}$, se tiene $r^s \in \mathbf{R}_o$, luego $(r^s)^0 = 1 = r^0 = r^{0 \cdot s}$

Luego para todo $r \in \mathbf{R}_o$, $s \in \mathbf{Z}$: $(r^s)^0 = r^{0 \cdot s}$

Reunamos los resultados obtenidos en las tres fórmulas encuadradas con azul

Para todo $r \in \mathbf{R}_o$, $s, t \in \mathbf{Z}$: $(r^s)^t = r^{st}$

3º Potencia de un producto

Para todo $a, b \in \mathbf{R}$ y $n \in \omega_o$:

$$(ab)^n = ab \,.\, ab \,.\, \ldots \,.\, ab$$
$$= aa \ldots a \,.\, bb \ldots b$$ en virtud de la asociatividad y de la conmutatividad de la multiplicación de reales
$$= a^n \,.\, b^n$$
$$(ab)^0 = 1 = 1 \,.\, 1 = a^0 \,.\, b^0$$

Luego para todo $a, b \in \mathbf{R}_o$ y $n \in \omega$: $(ab)^n = a^n \,.\, b^n$ (3)

Si $a, b \in \mathbf{R}_o$ y $n \in \omega_o$

Entonces
$$(ab)^{-n} = ((ab)^n)^{-1}$$ Definición de la potencia de exponente $-n$
$$= (a^n b^n)^{-1}$$ Fórmula (3)
$$= (a^n)^{-1} (b^n)^{-1}$$ El inverso de un producto es igual al producto de los inversos
$$= a^{-n} \,.\, b^{-n}$$ Definición de potencias de exponentes $-n$

Para todo $a, b \in \mathbf{R}_o$ y $n \in \omega_o$: $(ab)^{-n} = a^{-n} \,.\, b^{-n}$

Para todo $a, b \in \mathbf{R}_o$ y $z \in \mathbf{Z}$: $(ab)^z = a^z \,.\, b^z$

4º Recapitulemos:

Para todo $a, b \in \mathbf{R}_o$ y $s, t \in \mathbf{Z}$:

$$a^s \,.\, a^t = a^{s+t} \quad ; \quad (a^s)^t = a^{s \cdot t} \quad , \quad (a.b)^s = a^s \,.\, b^s$$

EJERCICIOS

1.

$a \in \mathbf{R}$ $\qquad$ $n \in \omega$ $\qquad$ $r \in \mathbf{R}_o$

En el grupo conmutativo $\mathbf{R}$, $+$	En el grupo conmutativo $\mathbf{R}_o$, $\cdot$
$3a = a + a + a$	$r^3 = r \cdot r \cdot r$
$na = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ términos}}$	$r^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ factores}}$
$0a = 0 =$ neutro de $\mathbf{R}$, $+$	$r^0 = 1 =$ neutro de $\mathbf{R}_o$, $\cdot$
$(-1)a = -a =$ opuesto (o simétrico) de a en $\mathbf{R}$, $+$	$r^{-1} =$ inverso (o simétrico de r en $\mathbf{R}_o$, $\cdot$
$(-3)\,a = -(3a) = 3\,(-a) = (-a) + (-a) + (-a)$	$r^{-3} = (r^3)^{-1} = (r^{-1})^3 = r^{-1} \cdot r^{-1} \cdot r^{-1}$
$(-n)\,a = -(na) = n\,(-a) = \underbrace{(-a) + (-a) + \ldots + (-a)}_{n \text{ términos}}$	$r^{-n} = (r^n)^{-1} = (r^{-1})^n = \underbrace{r^{-1} \cdot r^{-1} \ldots r^{-1}}_{n \text{ factores}}$
El producto de a por n designa la suma de una sucesión de n **términos** iguales a a	La enésima potencia de r designa el producto de una sucesión de n **factores** iguales a r
El producto de a por $-n$ designa la suma de una sucesión de n **términos** iguales a $-a$.	La $(-n)$-ésima potencia de r designa el producto de una sucesión de n **factores** iguales a r^{-1}

2.

$a, b \in \mathbf{R}$ $\qquad$ $s, t \in \mathbf{Z}$ $\qquad$ $q, r \in \mathbf{R}_o$

En el grupo conmutativo $\mathbf{R}$, $+$	En el grupo conmutativo $\mathbf{R}_o$, $\cdot$
1° $sa + ta = (s + t)\,a$	1° $r^s \cdot r^t = r^{s+t}$
2° $s\,(ta) = (st)\,a$	2° $(r^t)^s = r^{st} = r^{ts}$
3° $s\,(a + b) = sa + sb$	3° $(q \cdot r)^s = q^s \cdot r^s$
La ley $\mathbf{Z} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} : (s, a) \to sa$	La ley $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}_o \to \mathbf{R}_o : (s, r) \to r^s$
1. distribuye la adición de $\mathbf{Z}$, $+$	
3. distribuye la adición de $\mathbf{R}$, $+$	3. distribuye la multiplicación de $\mathbf{R}_o$, $\cdot$

3.

He aquí $a, b \in \mathbf{R}$

$(2a + 3b) + (5a + 6b) = 7a + 9b$

4.

He aquí $x, y \in \mathbf{R}$

$(17x + 8y) + (9x + 15y) =$

$(2x + 3y) + (91x + 14y) + (101x + 27y) =$

$21x + (72x + 41y) + 18y + (21x + 5y) =$

¿Qué ejercicio conviene poner aquí?

5.

He aquí $x, y \in \mathbf{R}$

$(-17x + 8y) + (9x - 15y) =$

$(2x - 3y) + (-91x - 14y) + (101x + 27y) =$

¿Qué ejercicio conviene poner aquí?

$13y - 217x - 712x - 48y + 84y - 88y + 6x =$

He aquí $a, b \in \mathbf{R}$

$a^2b^3 \cdot a^5b^6 = a^7b^9$

He aquí $x, y \in \mathbf{R}$

$x^{17}y^8 \cdot x^9y^{15} =$

$x^2y^3 \cdot x^{91}y^{14} \cdot x^{101}y^{27} =$

¿Qué ejercicio conviene poner aquí?

$y^{13}x^{217}x^{712}y^{48}y^{84}y^{88}x^6 =$

He aquí $x, y \in \mathbf{R}_o$

$x^{-17}y^8 \cdot x^9y^{-15} =$

$x^2y^{-3} \cdot x^{-91}y^{-14} \cdot x^{101}y^{27} =$

$x^{-21} \cdot x^{72}y^{-41} \cdot y^{-18} \cdot x^{-21}y^5 =$

¿Qué ejercicio conviene poner aquí?

6. He aquí $x \in \mathbf{R}_o$

$(-x)^{17} = ((-1)x)^{17} = (-1)^{17}x^{17} = (-1)x^{17} = -x^{17}$

$(-x)^{17} \cdot x^9 = (-1)^{17} \cdot x^{17} \cdot x^9 = (-1)x^{26} = -x^{26}$

$(-x)^{13}x^{24} =$

$(-x)^{13}x^{-24} =$

$(-x)^{14} =$

$(-x)^{14}x^{15} =$

7. He aquí $x, y \in \mathbf{R}_o$.

$(-x)^{17}y^8x^9(-y)^{15} =$

$(-x)^{21} \cdot (-x)^{72}y^{41} \cdot (-y)^{18} \cdot x^{21}(-y)^5 =$

$(-x)^{-17}y^8 \cdot (-x)^9(-y)^{-15} =$

$(-x)^2(-y)^{-3} \cdot (-x)^{-91}y^{-14} \cdot (-x)^{101}y^{27} =$

$(-y)^{13}(-x)^{-217}x^{-217}y^{-48}(-y)^{84}(-y)^{-88}x^6 =$

8. Para todo $r \in \mathbf{R}$: $r^2 \in \mathbf{R}^+$

9. Para todo $s \in \mathbf{R}_o$ y $z \in \mathbf{Z}$: $s^z \in \mathbf{R}_o$

10. Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ y $z \in \mathbf{Z}$: $r^{2z} = (r^z)^2 \in \mathbf{R}_o^+$

11. Toda potencia de un número real no nulo, cuyo exponente es par, es positiva.

12. Para todo $r \in \mathbf{R}_o$ y todo $z \in \mathbf{Z}$:

$$r^{2z+1} = r^{2z} \cdot r$$

13. Para todo $z \in \mathbf{Z}$:

$$0 < r \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad r^{2z+1} > 0$$
$$0 > r \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad r^{2z+1} < 0$$

14. Toda potencia de un número real estrictamente positivo, cuyo exponente es impar, es estrictamente positiva.

Toda potencia de un número real estrictamente negativo, cuyo exponente es impar, es estrictamente negativa.

15. $7 \times (-2)^{-4} - 6 \times 3^2 - 2 \times 5^{-3} + (-5)^{-2} =$

16. He aquí $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$

$2^a\, 3^b \cdot 2^c\, 3^d =$
$2^{-a}\, 3^b \cdot 2^c\, 3^{-d} =$
$2^{5a}\, 3^{6b} \cdot 2^{2c}\, 3^{-7d} =$
$2^{5a} (-3)^{6b} \cdot (-3)^5 (-2)^{2a} =$

17. Las letras designan números reales.

$(2x)^2 =$	;	$2(2x) =$
$(3x)^3 =$	,	$3(3x) =$
$(-4x)^4 =$	;	$4(-4x) =$
$(-5x)^5 =$	;	$5(-5x) =$
$2(a+b) =$	;	$(ab)^2 =$
$(2x^2)^2 =$	;	$2(2x^2) =$
$(-3x^3)^3 =$	;	$3(-3x^3) =$
$(-5x^5)^5 =$	;	$5(-5x^5) =$
$(2a^7b^4c^{12})^2 =$		

18.

$a, b, c \in \mathbf{R}$

$2\,(7a) =$

$(-2)\,(7a) =$

$2\,(-7a) =$

$(-2)\,(-7a) =$

$-(7a) =$

$-(a - b + c) =$

$-(2a - 3b - 5c) =$

$7\,(a - 2b + 3c) =$

$(-5)\,(2 + a - 3c) =$

$a, b, c \in \mathbf{R}_o$

$(a^7)^2 =$

$(a^7)^{-2} =$

$(a^{-7})^2 =$

$(a^{-7})^{-2} =$

$(a^7)^{-1} =$

$(a \cdot b^{-1} \cdot c)^{-1} =$

$(a^2b^{-3}c^{-5})^{-1} =$

$(ab^{-2}c^3)^7 =$

$(2a\,c^{-3})^{-5} =$

19. He aquí $r \in \mathbf{R}_o$; $m; n \in \omega$; $s, t \in \mathbf{Z}$

$$r^3/r^2 = r^3 \cdot (r^2)^{-1} = r^3 \cdot r^{-2} = r^{3-2} = r$$

$$r^4/r^7 = r^4 \cdot (r^7)^{-1} = r^4 \cdot r^{-7} = r^{4-7} = r^{-3} = 1/r^3$$

$$r^m/r^n = r^m \cdot (r^n)^{-1} = r^m \cdot r^{-n} = r^{m-n} = 1/r^{n-m}.$$

$$r^s/r^t = r^s \cdot (r^t)^{-1} = r^s \cdot r^{-t} = r^{s-t} = 1/r^{t-s}$$

$$\frac{r^s}{r^t} = r^{s-t} = \frac{1}{r^{t-s}}$$

20. Las letras designan elementos de

R

$(5a - 7b + 3c) - (-2a + 5b + 4c) =$

$(-8a + 14b - c) - (-a + b - 9c) =$

enuncia y resuelve

$\mathbf{R}_o$

$a^5b^{-7}c^3/a^{-2}b^5c^4 =$

enuncia y resuelve

$a^{-1}b^{-18}c^7d^{-14}/a^{-3}b^{-18}c^{-7}d^{-14}$

3 — POTENCIAS Y ORDEN

He aquí los números reales positivos a y b y $n \in \omega_o$

Luego $0 \leqslant a \leqslant b$ o $0 \leqslant b \leqslant a$

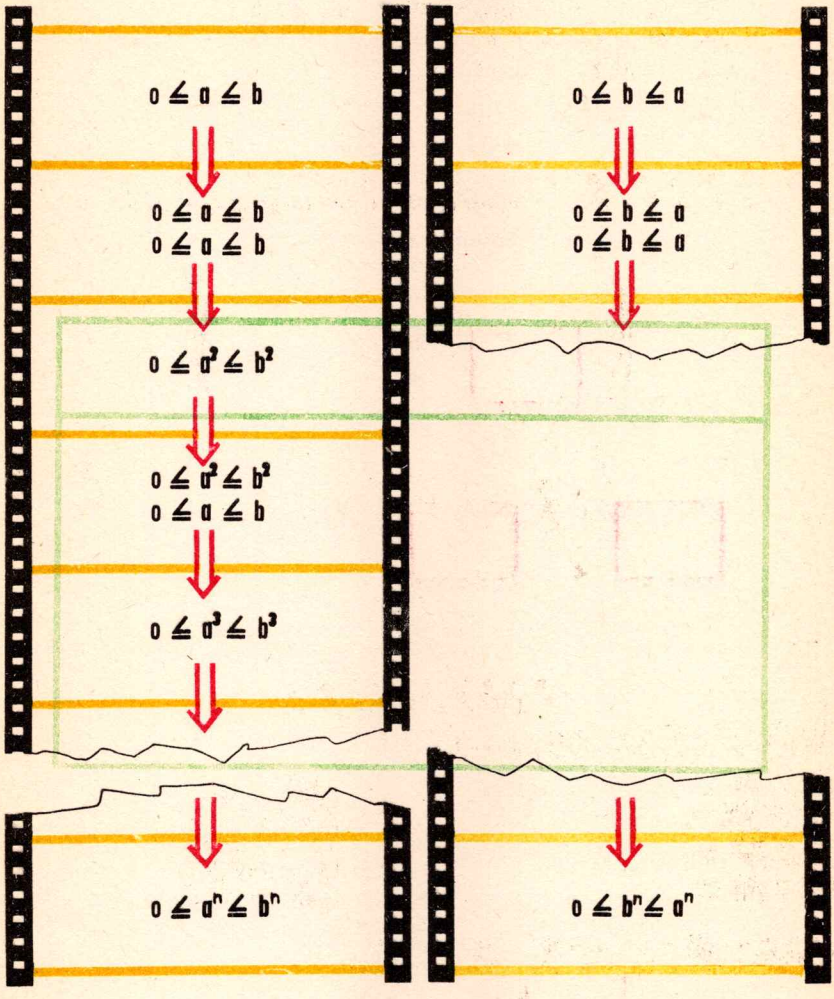


FIG. 277

Para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \omega_o$:

$$0 \leqslant a \leqslant b \iff 0 \leqslant a^n \leqslant b^n$$

4 — CUADRADO DE UNA SUMA DE NÚMEROS REALES

Si $a, b \in \mathbf{R}$

Entonces
$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b)\\ &= a \cdot (a + b) + b\,(a + b)\\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b\\ &= a^2 + 2 \cdot ab + b^2\\ &= a^2 + 2a \cdot b + b^2\end{aligned}$$

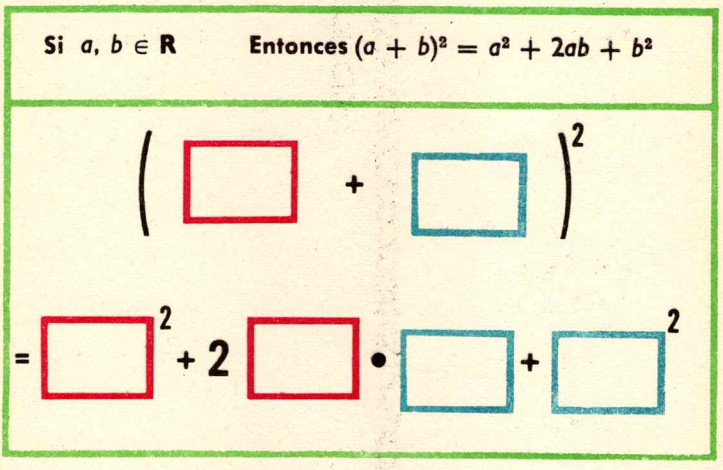


FIG. 278

EJERCICIOS

Las letras designan números reales.

1. $(x + 1)^2 =$
   $(3x + 2)^2 =$
   $(x^2 + 1)^2 =$
   $(ax + b)^2 =$
   $(3a^3 + 2)^2 =$
   $(abx + cdy)^2 =$
   $(5 + 3vy^2)^2 =$
   $(5m^5 + 1)^2 =$

2. $(a + b + c)^2 = (\boxed{a+b} + \boxed{c})^2$
   $= \square^2 + 2\,\square\,\square + \square^2$
   $= \ldots$
   $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

   $(x + y^2 + 1)^2 =$

3. **Si** r designa un número real no nulo

Entonces $(r + r^{-1})^2 =$

$(2r + 2r^2 + 2r^{-2})^2 =$

4. $(a + 2b)^2 + (2a + b)^2 =$

$(2a + 3b)^2 - (3a + 2b)^2 =$

5. $(x + a)^4 = ((x + a)^2)^2$

$= (x^2 + 2ax + a^2)^2$

$= \ldots$

$= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$

6. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$u^2 + 2uv + v^2 =$

$b^2 + 2b + 1 =$

$9a^4 + 6a^2x + x^2 =$

$2mn + m^2 + n^2 =$

$a^6 + 8a^3 + 16 =$

7. **Si** $a, b \in R$

Entonces $(a - b)^2$

$= (\square + \square)^2$

$= (a + -b)^2$

$= a^2 + 2\,a\,(-b) + (-b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

8. $(x - 1)^2 =$

$(1 - x)^2 =$

$(2x - 1)^2 =$

$(-5 + 3x)^2 =$

$(-a - b)^2 =$

$(2a^2b - 3ab^2)^2 =$

$(a + b - c)^2 =$

9. $(a + b)^2 - (a - b)^2 =$

$(a - b)^2 - (a - 2b)^2 =$

$(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 - (a - b - c)^2 =$

10. $4a^2 - 4a + 1 =$

$x^6 - 2x^5 + x^4 =$

$a^2 - 2 + a^{-2} =$

5 — DIFERENCIA DE CUADRADOS DE NÚMEROS REALES

Si $a, b \in \mathbf{R}$

Entonces
$$\begin{aligned} & (a + b)(a - b) \\ = \; & a(a - b) + b(a - b) \\ = \; & a^2 - ab + ba - b^2 \\ = \; & a^2 + (ab - ab) - b^2 \\ = \; & a^2 + 0 - b^2 \\ = \; & a^2 - b^2 \end{aligned}$$

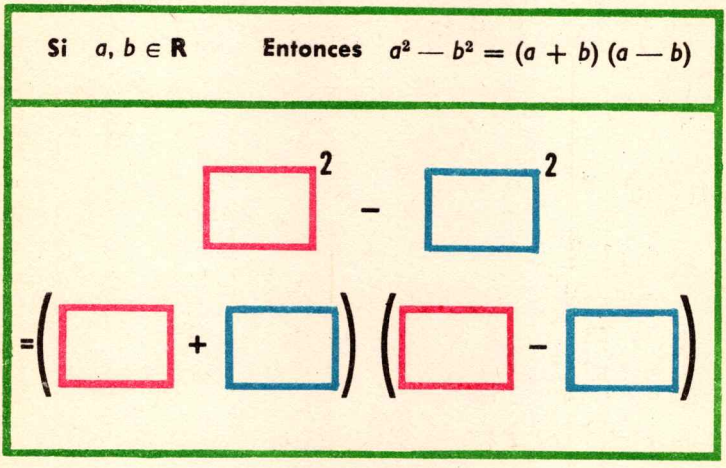


FIG. 279

EJERCICIOS

Las letras designan números reales.

1. $a^2 - 1 =$
   $4b^2 - c^2 =$
   $9x^2y^2 - 16 =$
   $x^4 - a^4 =$
   $a^6 - b^6 =$

   $(2x + 3)(2x - 3) =$
   $(3x^3 - 7y^7)(3x^3 + 7y^7) =$
   $(a + 1)^2 - (a - 1)^2 =$
   $(2a - 3b)^2 - (2a + 3b)^2 =$
   $(s + d)^2 - d^2 =$

2. Si $a, b \in \mathbf{R}_o$

   Entonces $a^{-2} - b^{-2} =$
   $c^8 - a^{-6}b^{-10} =$
   $9a^2 - 16a^{-2} =$

3. ¿Cómo calcular $(a + b - c)(a + b + c)$?

He aquí dos métodos:

$$\begin{aligned}&(a + b - c)(a + b + c)\\ &= a(a + b + c) + b(a + b + c)\\ &\qquad - c(a + b + c)\\ &= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc\\ &\qquad - ca - cb - c^2\\ &= a^2 + b^2 - c^2 + 2ab\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a + b - c)(a + b + c)\\ &= ((a + b) - c)((a + b) + c)\\ &= (a + b)^2 - c^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2 - c^2\end{aligned}$$

4. $(1 - a - b)(1 + a + b) =$
$(2x - 3y + 4z)(2x + 3y - 4z) =$
$(-a^{-1} + 1 - a) \cdot (a + 1 + a^{-1}) =$

5.
$5 \times 7 = 36 - 1$
$4 \times 8 = 36 - 4$
$3 \times 9 = 36 - \ldots$
$2 \times 10 =$
$1 \times 11 =$

$11 \times 9 = 100 - 1$
$12 \times 8 = 100 - \ldots$
$13 \times 7 =$
$\ldots$

6 — EJERCICIOS RECAPITULATIVOS

Salvo mención especial, las letras designan números reales.

1.
$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)^2\\ &= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)\\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(\bullet + \bullet)^3 = \bullet^3 + 3\,\bullet^2\bullet + 3\bullet\,\bullet^2 + \bullet^3$$

2.
$(2x + 1)^3 =$
$(a^2 + 3)^3 =$

$(5xy^2 + z)^3 =$
$(2x + 3y^2)^3 =$

3.
$$\begin{aligned}(x - y)^3 &= \left(\boxed{x} + \boxed{-y}\right)^3\\ &= \boxed{x}^3 + 3\boxed{x}^2\boxed{-y} + 3\boxed{x}\boxed{-y}^2 + 3\boxed{-y}^3\\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\end{aligned}$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$(\bullet - \bullet)^3 = \bullet^3 - 3\bullet^2\bullet + 3\bullet\bullet^2 - \bullet^3$$

4.
$(x^3 - 1)^3 =$
$9^3 =$
$99^3 =$

5.
$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$
$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

6.

$$\begin{array}{rr} x & +y \\ \cdot\ x & -y \\ \hline -xy & -y^2 \\ +x^2 & +xy \\ \hline x^2 & -y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} x^2 & +xy & +y^2 \\ \cdot & x & -y \\ \hline -x^2y & -xy^2 & -y^3 \\ x^3 & +x^2y & +xy^2 \\ \hline x^3 & & -y^3 \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{rrrr} x^3 & +x^2y & +xy^2 & +y^3 \\ \cdot & & x & -y \\ \hline -x^3y & -x^2y^2 & -xy^3 & -y^4 \\ x^4 & +x^3y & +x^2y^2 & +xy^3 \\ \hline x^4 & & & -y^4 \end{array}$$

8. $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4$

9. $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) = x^5 - y^5$

10. $x^6 - y^6 = (x - y)(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)$

11. Si $n \in \omega_o$ Entonces

$$\begin{array}{rrrrrr} x^n & +x^{n-1}y & +x^{n-2}y^2 & +\ldots & +x^2y^{n-2} & +xy^{n-1} & +y^n \\ \cdot & & & & & x & -y \\ \hline -x^ny & -x^{n-1}y^2 & -x^{n-2}y^3 & -\ldots & -x^2y^{n-1} & -xy^n & -y^{n+1} \\ x^{n+1} & +x^ny & +x^{n-1}y^2 & +x^{n-2}y^3 & +\ldots & +x^2y^{n-1} & +xy^n \\ \hline x^{n+1} & & & & & & -y^{n+1} \end{array}$$

12. Si $n \in \omega_o$

Entonces $(x - y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} + y)^n = x^{n+1} - y^{n+1}$

13. Si $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$ Entonces $x^n - y^n = (x - y) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

14. Si $n \in \omega_o$ y $x \neq y$

Entonces

$$x + y = (x - y)^{-1} \cdot (x^2 - y^2) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x - y)^{-1} \cdot (x^3 - y^3) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = (x - y)^{-1} \cdot (x^4 - y^4) = \frac{x^4 - y^4}{x - y}$$

$$x^n + x^{n-1}y + \ldots + xy^{n-1} + y^n = (x - y)^{-1}(x^{n+1} - y^{n+1}) = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$$

15.

Si $x \neq 1$ **Entonces** $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{1 - x^n}{1 - x} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$

Si $x = 1$ **Entonces** $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = n$

16. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{19} + 2^{20} = 2.097.151$

17. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

18. $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = (3^{n+1} - 1)/2$

19. $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^5 + \ldots - 2^{19} + 2^{20}$
$= 1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + \ldots + (-2)^{19} + (-2)^{20} = 699.051$

20. $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^5 + \ldots - 2^{19} + 2^{20} - 2^{21} = -1.398.101$

21. He aquí los reales $a \neq b$. Por qué número real x se tiene

$$\frac{a + x}{b + x} = \frac{a}{b}$$

Solución: $\dfrac{a + x}{b + x} = \dfrac{a}{b} \iff (a + x)\, b = (b + x)\, a$

$\iff ab + xb = ba + xa$

$\iff xb = xa$

$\iff x(a - b) = 0$

$\iff x = 0$

22. Si $a \neq b$ y $x \neq 0$,

Entonces $\dfrac{a + x}{b + x} \neq \dfrac{a}{b}$

$\dfrac{ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

23. $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \dfrac{a - b}{a + b}$ (Se ha supuesto $a + b \neq 0$)

$\dfrac{a^3 - b^3}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} =$ (Se ha supuesto $a \neq b$)

$\dfrac{a + b}{a^2 - b^2} =$

$\dfrac{a - b}{a^2 + b^2} =$

7 — MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS BINARIOS LIMITADOS

He aquí un número binario limitado $b = 101101{,}110111 > 0$

$$\begin{array}{r} 101101{,}110111 \\ 101101{,}110111 \\ \hline 1011011\ 101110 \end{array}$$

$10b = (1 + 1)\,b = 1b + 1b = b + b =$

$10\,(-b) = -(10b) \qquad = -1011011{,}10111$

El producto de un número binario limitado por 10 se obtiene corriendo la coma un lugar hacia la derecha.

$10 \times 1110{,}11101 = 11101{,}1101$

$10 \times 110111 = 10 \times 110111{,}0 = 1101110$

$10^4 \times 1110{,}11101 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 1110{,}11101$
$= 10 \times 10 \times 10 \times 11101{,}1101$
$= 10 \times 10 \times 111011{,}101$
$= 10 \times 1110111{,}01$
$= 11101110{,}1$

$10^7 \times 1101{,}1101 = 10^7 \times 1101{,}1101000 = 11011101000$

$10^5 \times 0{,}001011 = 000101{,}1 = 101{,}1$

$10^3 \times 10111 = 10^3 \times 10111{,}000 = 10111000$

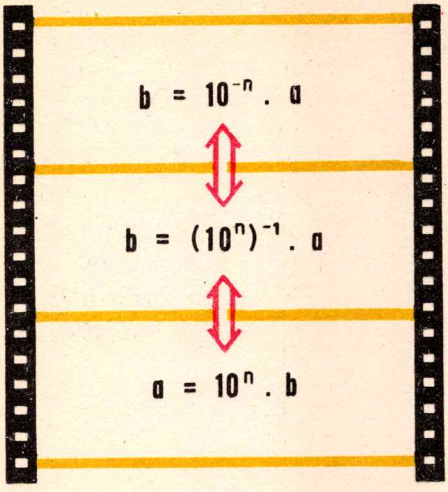
$10^3 \times (-1011{,}1011) = 10 \times 10 \times 10 \times (-1011{,}1011)$
$= 10 \times 10 \times (-10111{,}011)$
$= 10 \times (-101110{,}11)$
$= -1011101{,}1$

Expresemos, en forma terminante, la regla de cálculo que acaba de aparecer.

El producto de un número binario limitado por 10^n se obtiene corriendo la coma *n* lugares hacia la derecha.

He aquí un número binario limitado a y $n \in \omega$

Nos proponemos calcular el producto $b = 10^{-n} \cdot a$



(§ 1, p. 290)

(C. 10, § 6, prop. 2, p. 220)

FIG. 280

Se vuelve a encontrar el número dado a a partir del número b que se busca, corriendo la coma de este último n lugares hacia la derecha.

Luego el número buscado b se obtiene a partir de a, corriendo la coma n lugares hacia la izquierda.

El producto de un número binario limitado por 10^{-n} se obtiene corriendo la coma n lugares hacia la izquierda.

$$10^{-2} \times 1010{,}1011 = 10{,}101011$$
$$10^{-5} \times 10{,}11101 = 0{,}00010111101$$
$$10^{-6} = 10^{-6} \times 1 = 0{,}000001$$
$$10^{-n} = 10^{-n} \times 1 = 0{,}00\ldots01 \quad (n \text{ cifras}) \qquad (\text{para todo } n \in \omega_0)$$
$$10110{,}1101 = 101101101 \cdot 10^{-4}$$
$$-1101{,}011011 = (-1101011011) \cdot 10^{-6}$$

Si a designa un número binario limitado que tiene m cifras después de la coma,
b designa un número binario limitado que tiene n cifras después de la coma,

Entonces $a = s \cdot 10^{-m}$ $\quad b = t \cdot 10^{-n}$ $\quad$ (con $s, t \in \mathbf{Z}$)

y $\quad a \cdot b = s\,10^{-m} \cdot t\,10^{-n}$
$= st \cdot 10^{-m}\,10^{-n}$
$= st \cdot 10^{-(m+n)}$

Para todo $s, t \in \mathbf{Z}$ y $m, n \in \omega$:

$$s\,10^{-m} \cdot t\,10^{-n} = st \cdot 10^{-(m+n)}$$

La fórmula anterior establece que

El producto de dos números binarios limitados es un número binario limitado

y establece un método que permite efectivamente calcular este producto.

$$1011{,}101 \times 11101{,}01101$$

($1011{,}101$: 3 — $11101{,}01101$: 5)

$$= 10^{-3} \times 1011101 \times 10^{-5} \times 1110101101$$

$$= 10^{-8} \times 1011101 \times 1110101101$$

$$= 10^{-8} \times 1010101011011001$$

$$= 10101010{,}11011001$$

(3+5)

$$\begin{array}{r} 1110101101 \\ \times \quad 1011101 \\ \hline 1110101101 \\ 1110101101 \\ 1110101101 \\ 1110101101 \\ 1110101101 \\ \hline 1010101011011001 \end{array}$$

EJERCICIOS

1. Enuncia la regla de cálculo del producto de dos números binarios limitados.

2. **Si** $s, t \in Z$ y $m \in \omega$

   Entonces $s \cdot 10^{-m} + t \cdot 10^{-m} = (s + t) \cdot 10^{-m}$.

3. La fórmula del ejercicio 2
   muestra (cosa que ya sabíamos) que la suma de dos binarios limitados es un binario limitado, y recuerda la regla de cálculo.

4. **Si** B designa el conjunto de números binarios limitados

   Entonces B, +, · es un anillo conmutativo.

5. El número *un medio*

   $$= 0{,}1 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

   $$= \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

6. El número *un cuarto*

$$= 0{,}01 = 10^{-2} = 100^{-1} = \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$= 2^{-2} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

7. El número *un octavo*

$$= 0{,}001 = 10^{-3} = 1000^{-1} = \frac{1}{1000} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100}$$

$$= 2^{-3} = 8^{-1} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

8. El número *un dieciseisavos*

$= \ldots$

$= \ldots$

9. $101{,}11 \times 10111{,}001 =$

10. $(-11{,}11) \times 1000{,}001 =$

11. $(-101{,}1) \times (-11101{,}01) =$

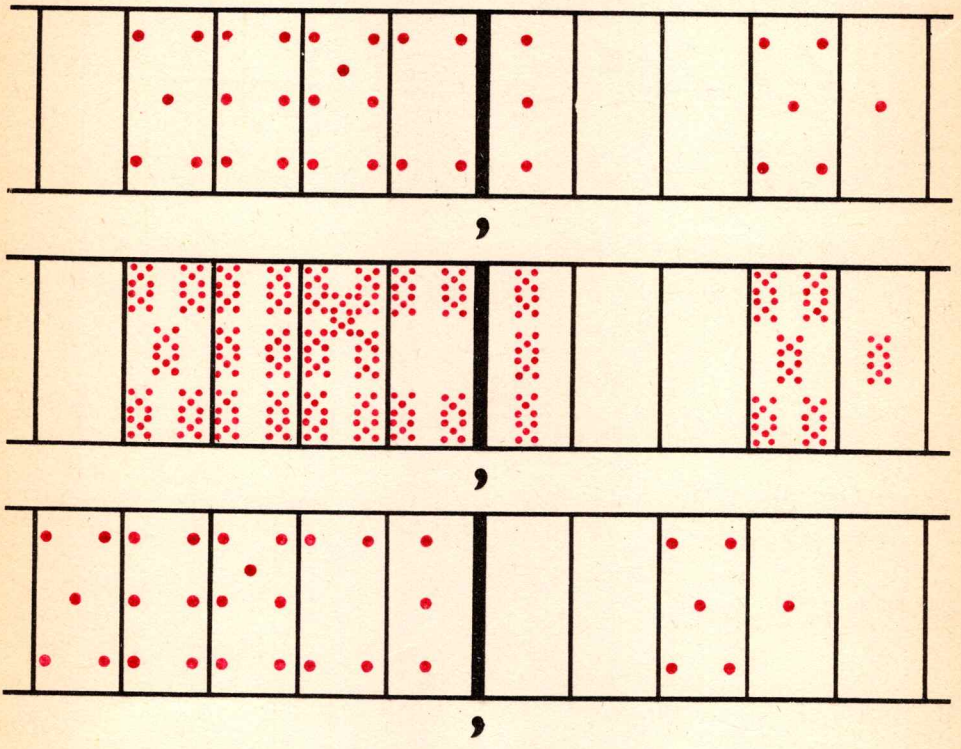
12. $(-10)^{-5} = -0{,}00001 = \frac{-1}{100000} = -\frac{1}{32} = (-2)^{-5}$

13. $(-0{,}1)^{-8} = (0{,}00000001)^{-1} = \left(\frac{1}{100000000}\right)^{-1} =$

$$= 100000000 = 256 = (-2)^8 = 2^8 = 10^8$$

8 — LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES LIMITADOS

$$
\begin{aligned}
&10 \times 5.674{,}300.51 \\
&= (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \times 5.674{,}300.51 \\
&= 1 \times 5.674{,}300.51 + 1 \times 5.674{,}300.51 + \ldots + 1 \times 5.674{,}300.51 \\
&= 5.674{,}300.51 + 5.674{,}300.51 + \ldots + 5.674{,}300.51
\end{aligned}
$$



$$10 \times 5.674{,}300.51 = 56.743{,}005.1$$

FIG. 281

$$10 \times (-\ 6.547{,}821) = -\ 65.478{,}21$$

El producto de un número decimal limitado por 10 se obtiene corriendo la coma un lugar hacia la derecha.

Un razonamiento análogo al del parágrafo anterior da lugar a los resultados siguientes:

Para todo $n \in \omega$:

El producto de un número decimal limitado por 10^n se obtiene corriendo la coma n lugares hacia la derecha.

El producto de un número decimal limitado por 10^{-n} se obtiene corriendo la coma n lugares hacia la izquierda.

En particular, $10^n = 100 \ldots 0$ (n ceros)

$$10^{-n} = 0{,}00 \ldots 01 \quad (n \text{ cifras})$$

Para todo número decimal limitado d, existe $a \in \mathbf{Z}$ y $m \in \omega$ tal que $d = 10^{-m} \cdot a$

Para todo $m, n \in \omega$:

$$10^{-m} \times 10^{-n} = \underbrace{0{,}00 \ldots 01}_{m \text{ cifras}} \times \underbrace{0{,}00 \ldots 01}_{n \text{ cifras}} = \underbrace{0{,}00 \ldots 01}_{m+n \text{ cifras}} = 10^{-(m+n)}$$

La próxima fórmula establece que

El producto de dos números decimales limitados es un número decimal limitado

y permite calcular ese producto

> Para todo $a, b \in \mathbf{Z}$ y todo $m, n \in \omega$: $(10^{-m} \cdot a) \cdot (10^{-n} \cdot b) = 10^{-(m+n)} \cdot ab$

EJERCICIOS

1. $4.017{,}975 \times 348{,}0561$

$= 10^{-3} \times 4.017.975 \times 10^{-4} \times 3.480.561$

$= 10^{-7} \times 13.984.807.083.975$

$= 1.398.480,708.397.5$

4.017.975
×3.480.561
4.017.975
241 078 50
2 008 987 5
321 438 00
1 607 190 0
12 053 925
13.984.807.083.975

2. $(-17{,}305) \times (-405{,}08) =$

3. $0{,}0075 \times (-1{,}00408) =$

4. **Si** D designa el conjunto de números decimales limitados
Entonces D, +, • es un anillo conmutativo

5. un *décimo* $= 0{,}1 = 10^{-1} = 1/10$

6. un *centésimo* $= 0{,}01 = 10^{-2} = 100^{-1} = (0{,}1)^2 = 1/100$

7. un *milésimo* $= 0{,}001 = (0{,}1)^3 = 10^{-3} = 1000^{-1} = 1/1000$

8. un *enésimo* $= n^{-1}$

9. un *diezmilésimo* =
un *cienmilésimo* =
un *millonésimo* =

10. un *medio* $= 2^{-1} = 5 \times 5^{-1} \times 2^{-1} = 5 \times 10^{-1} = 5 \times 0{,}1 = 0{,}5$
$= 1/2 = 5/10$

11. un *quinto* $= 5^{-1} = 2 \times 2^{-1} \times 5^{-1} = 2 \times 10^{-1} = 2 \times 0{,}1 = 0{,}2$
$= \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$

12. un *cuarto* $= 0{,}25 = \ldots$

13. $25^{-1} = 0{,}04 = \ldots$

14. $8^{-1} = 0{,}125 = \ldots$

15. $125^{-1} = 0{,}008 = \ldots$

16. $40^{-1} = 0{,}025 = \ldots$

17. $64^{-1} = 0{,}015.625 = \ldots$

18. 0,015 es un valor aproximado por defecto de 64^{-1} con error menor que 0,001

19. $\frac{1}{3} = 3^{-1} = 0{,}333 \ldots 3333 \ldots$

20. 0,333 es un valor aproximado por defecto de $3^{-1} = \frac{1}{3}$ con error menor que 10^{-3}

21. Escribe en forma decimal los números fraccionarios $(-2)^{-5}$ y $(-5)^{-2}$

22.

$5^1 = 5$	$2^{-1} = 0{,}5$	$= 1/2$
$5^2 = 25$	$2^{-2} = 0{,}25$	$= 1/4$
$5^3 = 125$	$2^{-3} = 0{,}125$	$= 1/8$
$5^4 = 625$	$2^{-4} = 0{,}0625$	$= 1/16$
$5^5 = 3125$	$2^{-5} = 0{,}03125$	$= 1/32$

$2^1 = 2$	$5^{-1} = 0{,}2$	$= 1/5$
$2^2 = 4$	$5^{-2} = 0{,}04$	$= 1/25$
$2^3 = 8$	$5^{-3} = 0{,}008$	$= 1/125$
$2^4 = 16$	$5^{-4} = 0{,}0016$	$= 1/625$
$2^5 = 32$	$5^{-5} = 0{,}00032$	$= 1/3125$
$2^6 = 64$	$5^{-6} = 0{,}000064$	
$2^7 = 128$	$5^{-7} = 0{,}0000128$	
$2^8 = 256$	$5^{-8} = 0{,}00000256$	
$2^9 = 512$	$5^{-9} = 0{,}000000512$	
$2^{10} = 1024$	$5^{-10} = 0{,}0000001024$	

¡Explica!

14

Números racionales y números irracionales

1 – MULTIPLICACIÓN DE UN NÚMERO REAL POR 10^z (con $z \in Z$)

$a = 4.673{,}10985$ etc.

$$
\begin{array}{rcl}
4.673 & \leqslant a \leqslant & 4.674 \\
4.673{,}1 & \leqslant a \leqslant & 4.673{,}2 \\
4.673{,}10 & \leqslant a \leqslant & 4.673{,}11 \\
4.673{,}109 & \leqslant a \leqslant & 4.673{,}110 \\
4.673{,}1098 & \leqslant a \leqslant & 4.673{,}1099 \\
4.673{,}10985 & \leqslant a \leqslant & 4.673{,}10986
\end{array}
$$

etc.

$$
\begin{array}{rcl}
46.731 & \leqslant 10a \leqslant & 46.732 \\
46.731{,}0 & \leqslant 10a \leqslant & 46.731{,}1 \\
46.731{,}09 & \leqslant 10a \leqslant & 46.731{,}10 \\
46.731{,}098 & \leqslant 10a \leqslant & 46.731{,}099 \\
46.731{,}0985 & \leqslant 10a \leqslant & 46.731{,}0986
\end{array}
$$

etc.

$10a = 46731{,}0985$ etc.

Un número decimal limitado se multiplica por 10 corriendo la coma un lugar hacia la derecha.

Para todo $n \in \omega$:

Un número decimal ilimitado se multiplica por 10^n corriendo la coma n lugares hacia la derecha.

Un número decimal ilimitado se multiplica por 10^{-n} corriendo la coma n lugares hacia la izquierda.

EJEMPLO: $a = 25387{,}0759247247 \ldots 247 \ldots$
$= 10^{-4} \times 253.870.759{,}247247 \ldots 247 \ldots$

2 — DIVISIÓN ARQUIMEDEANA

Si $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}_o$

Entonces $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b}$

En este parágrafo y los siguientes, nos proponemos estudiar un decimal ilimitado igual a a/b

En virtud de la fórmula que acabamos de recordar, podemos suponer

$$a \in \mathbf{R} \quad \text{y} \quad b \in \mathbf{R}_o^+$$

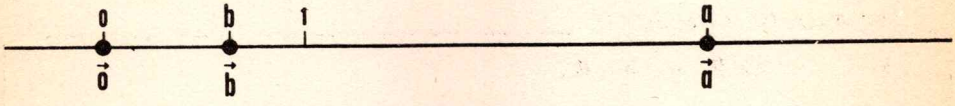


FIG. 282

En virtud del axioma de Arquímedes, existe uno y sólo un $z \in \mathbf{Z}$ tal que

$$z\vec{b} \leqslant \vec{a} < (z+1)\vec{b}$$

de donde

$$zb \leqslant a < (z+1)\, b$$

y

$$z \leqslant a/b < z+1$$

Si $z = 4$, **Entonces** $a/b = 4$, etc.

Por esta razón el número z se llama **parte entera de** a/b

Se escribe $z = \left[\dfrac{a}{b}\right] = [a/b]$

Pongamos $r = a - zb$

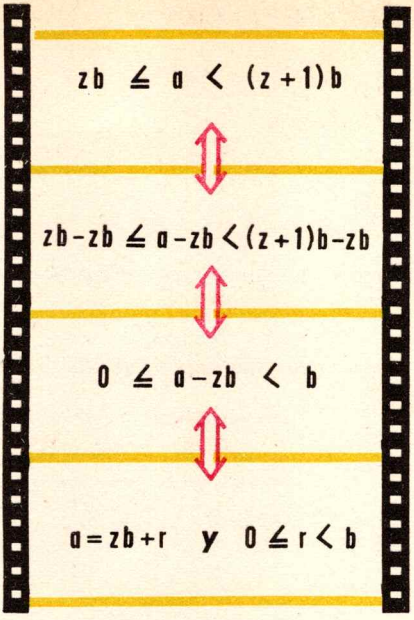


FIG. 283

TEOREMA DE ARQUIMEDES

Si $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}_o^+$

Entonces existe uno y sólo un $z \in \mathbf{Z}$ **y uno y sólo un** $r \in \mathbf{R}$ **tales que**

$$a = zb + r \quad y \quad 0 \leqslant r < b$$

z se llama **cociente entero** y r **resto** de la **división (arquimedeana)** de a por b.

Recordemos que z es la parte entera de a/b y también está definida por

$$z \leqslant a/b < z + 1$$

Si $a \in \mathbf{Z}$ y $b \in \omega_o$ **Entonces** $zb \in \mathbf{Z}$ y $r = a - zb \in \mathbf{Z}$

TEOREMA DE EUCLIDES

Si $a \in \mathbf{Z}$ y $b \in \omega_o$

Entonces existe uno y sólo un $z \in \mathbf{Z}$ **y uno y sólo un** $r \in \mathbf{Z}$ **tales que**

$$a = zb + r \quad y \quad 0 \leqslant r < b$$

Si $a \in \omega$ y $b \in \omega_o$

Entonces conoces desde hace tiempo un método que permite calcular el cociente y el resto de la división euclideana de a por b.

He aquí $a = 1.785.012$ y $b = 4.506$

1.785.012	4.506
1 351 8	396
433 21	
405 54	
27 672	
27 036	
636	

396 es el cociente y 636 el resto de la división euclideana de 1.785.012 por 4.506

En efecto $0 \leqslant 636 < 4506$

y

1.785.012	
— 300 × 4506	
— 90 × 4506	
— 6 × 4506	
636	

1.785.012	4.506
— 1.351.800	396
433.210	
— 405.540	
27.672	
— 27.036	
636	

$$1.785.012 = 300 \times 4506 + 90 \times 4506 + 6 \times 4506 + 636$$
$$= (300 + 90 + 6) \times 4506 + 636$$
$$1.785.012 = 396 \times 4506 + 636 \quad \text{y} \quad 0 \leqslant 636 < 4506.$$
$$a = z \cdot b + r \quad \text{y} \quad 0 \leqslant r < b$$

l.q.q.d.

$$\left[\frac{1.785.012}{4.506}\right] = 396$$

$$\frac{1.785.012}{4.506} = 396, \text{ etc.}$$

3 — DECIMAL ILIMITADO IGUAL A $\frac{a}{b}$ (con $a \in R$ y $b \in R_o$)

He aquí $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}_o$

Como $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ y $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

podremos suponer

$$a \in \mathbf{R}^+ \quad y \quad b \in \mathbf{R}_o^+$$

Vamos a aprender a calcular el valor decimal aproximado por defecto de a/b con error menor que 10^{-1}

Llamemos q_1 al cociente arquimedeano de $10a$ por b

$$q_1 \leqslant \frac{10a}{b} < q_1 + 1$$

$$q_1 \cdot 10^{-1} \leqslant \frac{a}{b} < (q_1 + 1)\, 10^{-1} \qquad (1)$$

$q_1 \cdot 10^{-1}$ es el valor decimal aproximado por defecto de a/b con error menor que 0,1

La fórmula (1) implica

$$q_1 \cdot 10^{-1} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant (q_1 + 1)\, 10^{-1}$$

Luego

$q_1 \cdot 10^{-1}$ comprende las primeras cifras de un decimal igual a a/b

— Del mismo modo puedes calcular un valor decimal (aproximado) por defecto con error menor que 0,1 de **1.785.012/4.506**

— Basta prolongar la división comenzada en § 2.

1 785 0120	4506
1 351 8	3961
433 21	
405 54	
276 72	
270 36	
6 360	
4 506	
1 854	

$$\frac{1.785.012}{4.506} = 396{,}1 \quad \text{etc}$$

1.785.012,0	4506
1 351 8	396,1
433 21	
405 54	
27 672	
27 036	
636 0	
450 6	
185 4	

∴

Si esta canción les divierte ...

Llamemos q_n al cociente arquimedeano de $10^n\,a$ por b

$$q_n \leqslant \frac{10^n a}{b} < q_n + 1$$

$$q_n \cdot 10^{-n} \leqslant \frac{a}{b} < (q_n + 1)\, 10^{-n}$$

$q_n \cdot 10^{-n}$ es el **valor decimal aproximado por defecto de a/b con error menor que 10^{-n}**

La fórmula (2) implica

$$q_n \cdot 10^{-n} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant (q_n + 1)\, 10^{-n}$$

Luego

$q_n \cdot 10^{-n}$ comprende las primeras cifras de un decimal igual a a/b

∴

Para calcular los valores decimales (aproximados) sucesivos de $\frac{1.785.012}{4.506}$, basta, pues, prolongar la división euclideana ya iniciada.

```
1785012,00000000000 | 4506
13518               |
------              | 396,14114513981
 43321
 40554
 -----
  27672
  27036
  -----
   636 0
   450 6
   -----
    185 40
    180 24
    ------
      5 160
      4 506
      -----
       6540
       4506
       ----
       20340
       18024
       -----
        23160
        22530
        -----
         6300
         4506
         ----
         17940
         13518
         -----
          44220
          40554
          -----
           36660
           36048
           -----
            6120
            4506
            ----
            1614
```

$$\frac{1.785.012}{4.506} = 396,14114513981 \text{ etc.}$$

4 — EJERCICIOS

1. 1/2 = 0,5

2. 1/3 = 0,33333 ... 3 ...

3. 1/4 = 0,25

4. 1/5 = 0,2

5. 1/6 = 0,1666666 ...

6. 1/7 = 0,142857 142857 142857 ... 142857 ...

7. 1/8 = 0,125

8. 1/9 = 0,11111 ... 1 ...

9. 1/10 = 0,1

10. 1/99 = 0,010101 ... 01 ...

11. 1/999 = 0,001001001 ... 001 ...

12. 0,000001000001 ... 000001 ... = 1/999.999

13. 0,000000000001000000000001 ... 000000000001 ... =

14. 2/9 = 0,22222 ... 2 ...

15. 7/9 = 0,77777 ... 7 ...

16. 8/9 =

17. 273/999 = 0,273273273 ... 273 ...

18. 0,456745674567 ... 4567 ... = 4567/9999

19. 0,35076 35076 35076 ... 35076 ... =

20. Puede ser que desees una justificación del ejercicio 17.
Para calcular $273/999$, se efectúa la larga división euclideana

$$273 \mid 999$$

Como $273000 = 999 \times 273 + 273$ y $0 \leqslant 273 < 999$,
esta división comenzará así:

$$\begin{array}{r|l} 273{,}000 & 999 \\ \hline & 0{,}273 \end{array}$$

$$\overline{273}$$

Y así, la historia vuelve a empezar y

$$\begin{array}{r|l} 273{,}000\,0\ldots & 999 \\ \hline & 0{,}273\ 273\ \ldots\ 273\ \ldots \end{array}$$

21. $\dfrac{-14}{17} = -\,0{,}8235294117647058.8235294117647058\ \ldots$

22. $-\,0{,}123\ 123\ 123\ \ldots\ 123\ \ldots =$

23. $-\,272{,}58\ 17\ 17\ 17\ 17\ \ldots\ 17\ \ldots =$

24. $-\,0{,}0\ 271\ 271\ 271\ \ldots\ 271\ \ldots =$

25. $[0] = 0$

26. $[3] = 3$

27. $[-7] = -7$

28. $[0{,}2] = 0$

29. $[3{,}2] = 3$

30. $[\bar{7}{,}2] = -7$

31. $[7, 2] = 7$

32. $[-7, 2] = -8$

33. Para todo real r: $[-r] = -[r]$ **ssi** $r \in Z$

34. Para todo real r: $r \notin Z$ **ssi** $[-r] = -[r] - 1$

35. Para todo real r: $[[r]] = [r]$

36. Para todo real r: $0 \leqslant r - [r] < 1$

37. Para todo real r:

$$r = [r].1 + (r - [r]) \quad \text{y} \quad 0 \leqslant r - [r] < 1$$

38. Para todo real r:

$[r]$ es el cociente (y $r - [r]$ el resto)
de la división arquimedeana de r por 1

39. En los parágrafos 2 y 3, estudiamos un decimal igual a a/b
De manera completamente análoga podríamos haber estudiado un binario igual a a/b

Si $a \in \omega$ y $b \in \omega_0$,
Entonces un binario ilimitado igual a a/b se obtiene efectuando la división euclideana de a por b, estando los números a y b escritos en binario.

40. $527 = 1000001111$
$25 = 11001$

527	25
50	21
27	
25	
2	

1000001111	11001
11001	10101
11111	
11001	
11011	
11001	
10	

41. $$\begin{array}{r|l} 100 & 11 \\ \underline{11} & 1 \\ 1 & \end{array} \qquad 1 = \left[\frac{100}{11}\right]$$

42. $$\begin{array}{r|l} 1{,}00 & 11 \\ \underline{11} & 0{,}01 \\ 1 & \end{array}$$

0,01 es el valor binario aproximado por defecto de 1/11 con error menor que 0,01

43. $\frac{1}{11} = 0{,}010101 \ldots 01 \ldots$

44. $\frac{1000001111}{11001} =$

45. $\frac{1}{10} = 0{,}1$

46. $\frac{1}{100} = 0{,}01$

47. $\frac{1}{101} = 0{,}00110011 \ldots 0011 \ldots$

48. $\frac{1}{110} = 0{,}1 \times \frac{1}{11} = 0{,}001010101 \ldots 01 \ldots$

49. $\frac{1}{111} = 0{,}001001001001 \ldots$

50. $\frac{1}{1000} = 0{,}001$

51. $\frac{1}{1001} = 0{,}000111000111 \ldots 000111 \ldots$

52. $\frac{1}{1010} =$

53. $\frac{1}{1111} =$

54. A fin de no complicarte la vida, enunciamos los teoremas de Arquímedes y de Euclides suponiendo el divisor b positivo (y aplicamos esencialmente este teorema cuando tanto el dividendo a como el divisor b eran positivos).

A veces es útil saber que estos teoremas continúan siendo válidos cuando el divisor es negativo.

De manera precisa,

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

Si $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}_o$

Entonces existe uno y sólo un $z \in \mathbf{Z}$ y uno y sólo un $r \in \mathbf{R}$ tal que

$$a = zb + r \quad y \quad 0 \leqslant r < |b|$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Si $b > 0$,

   Entonces $b = |b|$ y el teorema resulta del teorema de § 2.

2. Si $b < 0$,

   Entonces $-b > 0$ y en virtud del teorema de § 2, existe uno y sólo un $z' \in \mathbf{Z}$ y uno y sólo un $r \in \mathbf{R}$ tales que

$$a = z'(-b) + r \quad y \quad 0 \leqslant r < -b = |b|$$

Poniendo $z = -z'$, resulta

$$a = zb + r \quad y \quad 0 \leqslant r < |b|$$

l.q.q.d.

TEOREMA DE EUCLIDES

Si $a \in \mathbf{Z}$ y $b \in \mathbf{Z}_o$

Entonces existe uno y sólo un $z \in \mathbf{Z}$ y uno y sólo un $r \in \mathbf{Z}$ tales que

$$a = zb + r \quad y \quad 0 \leqslant r < |b|$$

5 — LOS NÚMEROS RACIONALES

DEFINICIÓN — *Un número real se llama* **racional**

ssi

es igual a una fracción cuyo numerador y denominador son números enteros racionales.

El conjunto de números racionales se anota Q

Luego $Q = \{a/b \mid a \in \mathbf{Z} \quad y \quad b \in \mathbf{Z}_o\}$

Como $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$ para todo $a \in \mathbf{Z}$ y todo $b \in \mathbf{Z}_o$, se tiene aún

$$Q = \{a/b \mid a \in \mathbf{Z} \quad y \quad b \in \omega_o\}$$

EJEMPLOS: 2/3, —3/7, 0 = 0/1, 1 = 1/1, 7 = 7/1, —8 = —8/1

son números racionales.

Todo entero racional z es un número racional, puesto que $z = z/1$

Luego $\omega \subset \mathbf{Z} \subset Q \subset \mathbf{R}$

El número 1/2 es un número racional que no es entero.

Mostraremos más adelante que existen reales que no son racionales.

EJERCICIOS

1. $0{,}3 = 3/10$ es un número racional.
2. $-24{,}485 = -24.485/1000 \in Q$
3. $\overline{123}{,}78 = -12.222/100 \in Q$
4. Todo número decimal limitado es un racional.
5. $\mathbf{Z} \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots \subset D \subset Q$
6. Todo binario limitado es un racional.
7. $\mathbf{Z} \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots \subset B \subset Q$
8. $B_1 \subset D_1$; $B_2 \subset D_2$
9. Para todo $n \in \omega_o$: $B_n \subset D_n$
10. $B \subset D$
11. $1/3 = 0{,}33333 \ldots 3 \ldots \in Q \setminus D$
12. Si el número real r no es una decimal limitado
    Entonces r no es un binario limitado.

6 — EL CUERPO ORDENADO DE NÚMEROS RACIONALES

TEOREMA

El conjunto de números racionales es un cuerpo ordenado.

Brevemente,

$\mathbf{Q}, +, \cdot, \leqslant$ es un cuerpo ordenado

DEMOSTRACIÓN:

1) La suma y el producto de todo par de racionales son racionales.

Si $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$

Entonces $q_1 = a/b$ y $q_2 = c/d$ con $a, c \in \mathbf{Z}$ y $b, d \in \mathbf{Z}_o$

$$q_1 + q_2 = \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbf{Q} \quad \text{y} \quad q_1 \cdot q_2 = \frac{ac}{bd} \in \mathbf{Q}$$

puesto que $ad + bc$, $ac \in \mathbf{Z}$ y $bd \in \mathbf{Z}_o$

Como ya sabes recordamos este hecho por la notación

$$\mathbf{Q}, +, \cdot$$

La adición y multiplicación de reales son asociativas y conmutativas.

Luego

la adición y la multiplicación de racionales son asociativas y conmutativas.

2) **$\mathbf{Q}, +$ es un grupo conmutativo.**

En efecto,

a) **Si** $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$, **Entonces** $q_1 + q_2 \in \mathbf{Q}$ (ver 1)

b) **Si** $q_1, q_2, q_3 \in \mathbf{Q}$, **Entonces** $(q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3)$ (ver 1)

c) **Si** $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$, **Entonces** $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$ (ver 1)

d) $0 = 0/1 \in \mathbf{Q}$ y para todo $q \in \mathbf{Q}$: $q + 0 = q = 0 + q$.

e) **Si** $q \in \mathbf{Q}$

Entonces $q = a/b$ con $a \in \mathbf{Z}$ y $b \in \mathbf{Z}_o$

$-q = (-a)/b \in \mathbf{Q}$ puesto que $-a \in \mathbf{Z}$ y $b \in \mathbf{Z}_o$

$q + (-q) = 0 = (-q) + q$.

l.q.q.d.

3) $\mathbf{Q_o}, \cdot$ **es un grupo conmutativo.**

En efecto,

a) En virtud de 1, el producto de dos racionales es un racional.

El producto de dos reales no nulos es un real no nulo (C. 10, § 6 nº 1, p. 218)

Luego el producto de todo par de racionales no nulos es un racional no nulo.

Dicho de otro modo,

Si $q_1, q_2 \in \mathbf{Q_o}$, **Entonces** $q_1, q_2 \in \mathbf{Q_o}$

b) **Si** $q_1, q_2, q_3 \in \mathbf{Q_o}$, **Entonces** $(q_1\, q_2)\, q_3 = q_1\, (q_2\, q_3)$ (ver 1)

c) **Si** $q_1, q_2 \in \mathbf{Q_o}$, **Entonces** $q_1\, q_2 = q_2\, q_1$ (ver 1)

d) $1 = 1/1 \in \mathbf{Q_o}$ y para todo $q \in \mathbf{Q_o} : q \cdot 1 = q = 1 \cdot q$

e) **Si** $q \in \mathbf{Q_o}$

Entonces $q = a/b$ con $a, b \in \mathbf{Z_o}$

$q^{-1} = b/a \in \mathbf{Q_o}$ puesto que $b, a \in \mathbf{Z_o}$

$q \cdot q^{-1} = 1 = q^{-1} \cdot q$

l.q.q.d.

4) En **R**: $\cdot$ distribuye $+$

Luego, en Q: $\cdot$ distribuye $+$

Hemos establecido que

Q, +, · es un cuerpo

5) Falta probar que el cuerpo $\mathbf{Q}, +, \cdot, \leqslant$ es ordenado.

a) $\leqslant$ define claramente un orden total sobre Q

b) Para todo $a, b, c \in \mathbf{R}$: $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$

Luego, para todo $q_1\, q_2\, q_3 \in \mathbf{Q}$: $q_1 < q_2 \Longrightarrow q_1 + q_3 < q_2 + q_3$

Ello establece que $\mathbf{Q}, +, \leqslant$ es un **grupo conmutativo ordenado.**

c) Para todo $a, b \in \mathbf{R}$: $a \geqslant 0, b \geqslant 0 \Longrightarrow ab \geqslant 0$

Luego, para todo $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$: $q_1 \geqslant 0, q_2 \geqslant 0 \Longrightarrow q_1\, q_2 \geqslant 0$ y hemos probado que

Q, +, · ⩽ es un cuerpo ordenado

l.q.q.d.

EJERCICIOS

1. $\mathbf{R}, +, \cdot$ es un cuerpo.

   Para las mismas leyes $+$ y $\cdot$, $\mathbf{Q}, +, \cdot$ es un cuerpo.

   Este hecho se expresa diciendo que

   Q es un sub-cuerpo de $\mathbf{R}, +, \cdot$

   ¿Cuándo diremos que una parte H del cuerpo $\mathbf{K}, +, \cdot$ es un sub-cuerpo de $\mathbf{K}, +, \cdot$?

2. Todo cuerpo comprende por lo menos dos elementos.

3. **Si** H es un sub-cuerpo del cuerpo $\mathbf{K}, +, \cdot$

   Entonces $0 \in \mathbf{H}$ y $1 \in \mathbf{H}$

4. Todo sub-cuerpo de **R** comprende 0 y 1

5. Todo sub-cuerpo de **R** contiene a **Z**

6. Todo sub-cuerpo de **R** comprende z^{-1} para todo $z \in \mathbf{Z}_0$

7. Todo sub-cuerpo de **R** comprende $a/b = ab^{-1}$ para todo $a \in \mathbf{Z}$ y $b \in \mathbf{Z}_0$

8. Todo sub-cuerpo de **R** contiene Q

9. **Q es el menor sub-cuerpo de $\mathbf{R}, +, \cdot$**

10. $\mathbf{Q}_0^+, \cdot, \leqslant$ es un grupo conmutativo ordenado.

11. $\mathbf{Q}_0^+, +, \cdot$ no es un cuerpo.

7 — CONJUNTOS NUMERABLES

DEFINICIÓN — *He aquí un conjunto E*

E es **numerable**

ssi

$$\# E = \delta$$

ssi

E es equipotente a ω

ssi

$$E \# \omega$$

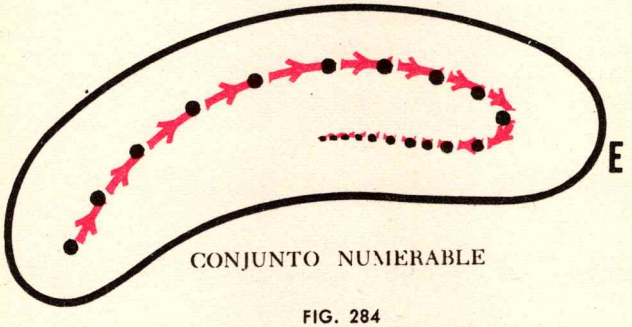
ssi

existe una biyección $f : \omega \to E$

Dicho de otro modo,

El conjunto E es numerable **ssi** se pueden numerar sus elementos utilizando todos los números naturales, atribuyendo uno y sólo un número a cada elemento de E.

Así E es numerable **ssi** existe una seguidilla (1) tal que el conjunto de sus puntos es E



CONJUNTO NUMERABLE

FIG. 284

Consecuencia inmediata de la definición:

Todo conjunto equipotente a un conjunto numerable, es también numerable.

Sabemos (MM1, C. 16, § 5, p. 243)
que un conjunto es infinito* ssi *se puede definir una seguidilla.

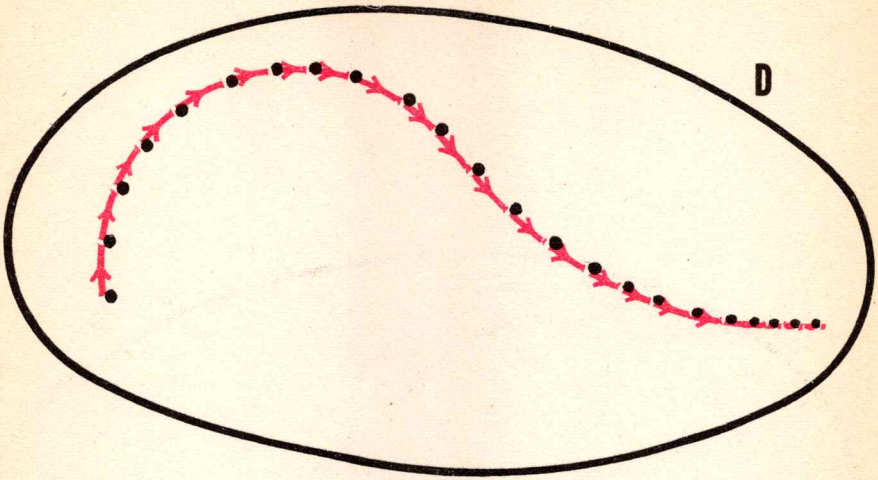
Luego, todo conjunto infinito contiene una parte numerable.

TEOREMA 1

Para todo conjunto infinito $I : \delta \leqslant \# I$

(1) Remitirse a Papy [MM1] p. 243 (N. del T.)

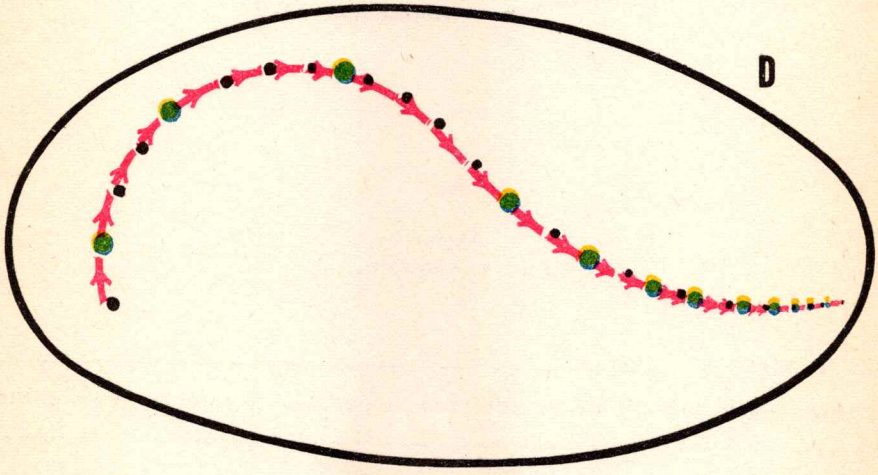
He aquí un conjunto numerable D



CONJUNTO NUMERABLE **D**

FIG. 285

y una parte infinita I de D cuyos elementos están representados por puntos verdes.



CONJUNTO NUMERABLE **D**
Y PARTE INFINITA I

FIG. 286

La seguidilla roja y la parte I definen la seguidilla azul, cuyo conjunto de puntos es I

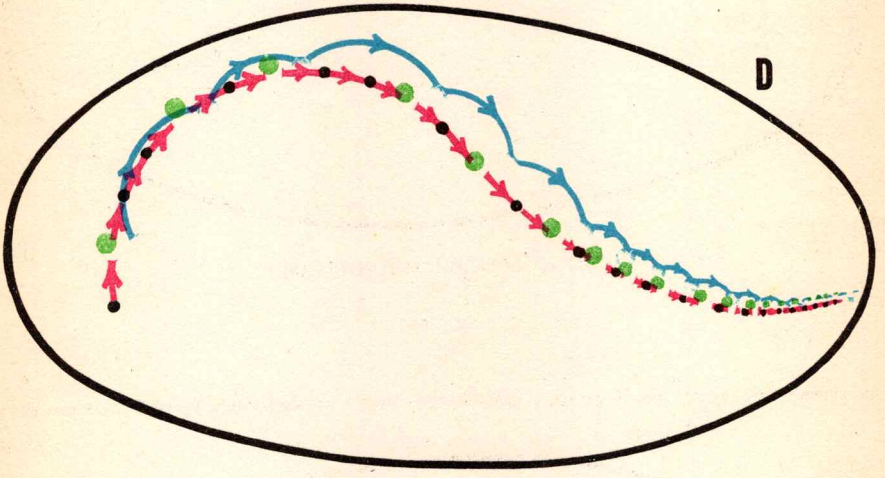


FIG. 287

Luego
I es numerable.

TEOREMA 2

Toda parte infinita de un conjunto numerable es también numerable.

Para establecer que un conjunto es numerable, basta probar que este conjunto es equipotente a una parte infinita de un conjunto numerable.

He aquí un conjunto infinito I y $a \in I$

Como I es infinito, existe una seguidilla de origen a definida en I, lo cual permite construir una biyección.

$$I \rightarrow I / \{a\}$$

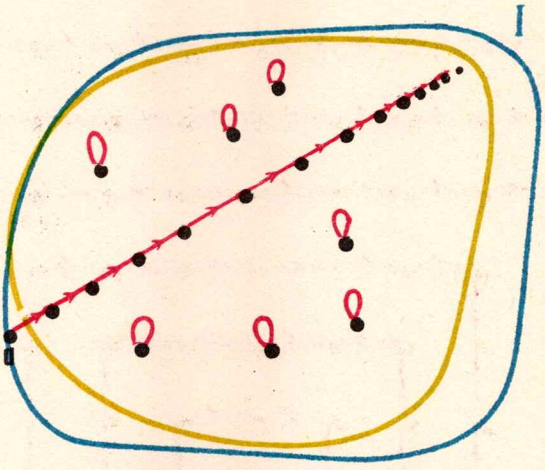


FIG. 288

De ahí resulta fácilmente:

Si I es un conjunto infinito y a un objeto,

Entonces $\# (I \setminus \{a\}) = \# I = \# (I \cup \{a\})$

Si I es un conjunto infinito y a, b objetos,

Entonces $\# I = \# (I \setminus \{a\}) = \# \big((I \setminus \{a\}) \setminus \{b\}\big) = \# (I \setminus \{a, b\})$

$= \# (I \cup \{a\}) = \# \big((I \cup \{a\}) \cup \{b\}\big) = \# (I \cup \{a, b\})$

Más generalmente,

TEOREMA 3

Si el conjunto I es infinito y el conjunto F finito

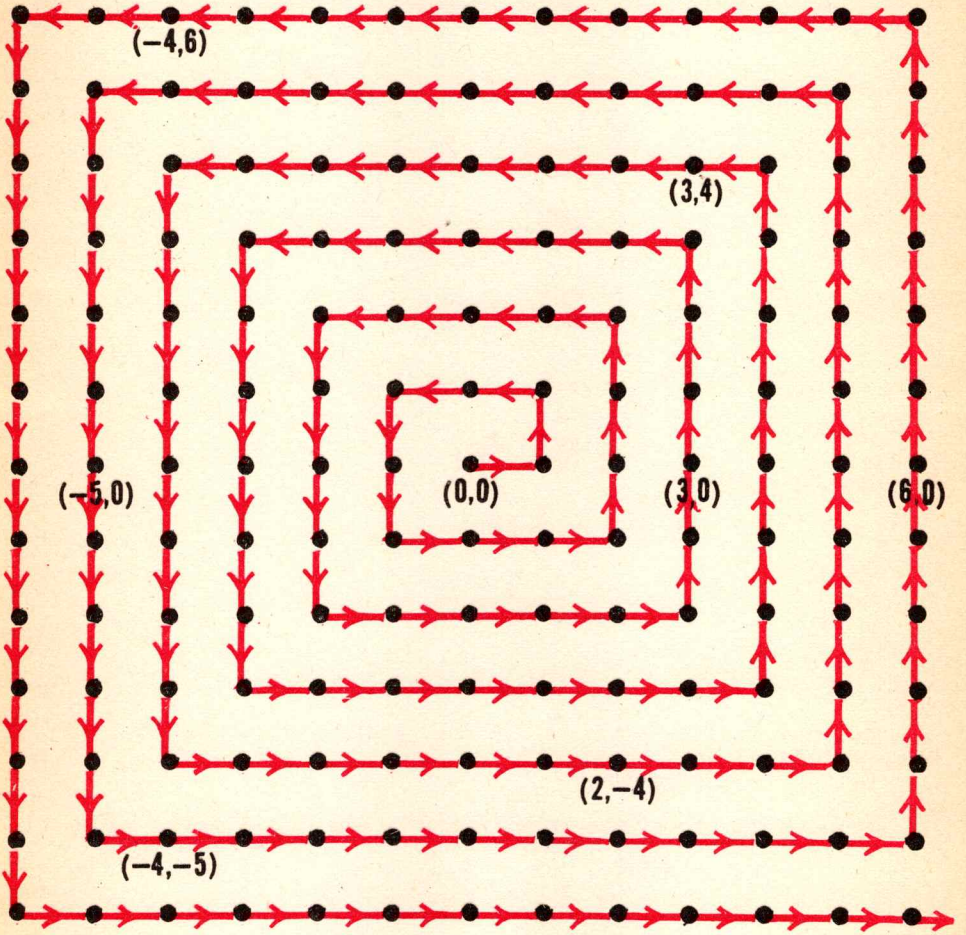
Entonces $\# (I \setminus F) = \# I = \# (I \cup F)$

8 — EL CONJUNTO DE RACIONALES ES NUMERABLE

TEOREMA

Los conjuntos Z y Q son numerables

DEMOSTRACIÓN:



Z × Z ES NUMERABLE

FIG. 289

Z × Z es numerable

$Z \times Z_o$ es una parte infinita de $Z \times Z$

$Z \times Z_o$ es numerable.

Diremos que la cupla $(a, b) \in Z \times Z_o$ define el racional a/b

Todo elemento de $Z \times Z_o$ define uno y sólo un racional.

Todo racional está definido por una infinidad de elementos de $Z \times Z_o$

Para todo racional q, elijamos uno y sólo un elemento de $Z \times Z_o$ que defina q

Marquemos en verde las cuplas, o pares ordenados, de $Z \times Z_o$ así elegidas.

Llamemos V al conjunto verde que se ha definido del modo indicado.

Q es equipotente a V

V es una parte infinita de $Z \times Z_o$

$Z \times Z_o$ es numerable

V es numerable

Q es numerable

Z es una parte infinita de Q

Z es numerable

l.q.q.d.

$$\omega \subset Z \subset Q$$
$$\omega \neq Z \neq Q$$
$$\delta = \# \omega = \# Z = \# Q$$

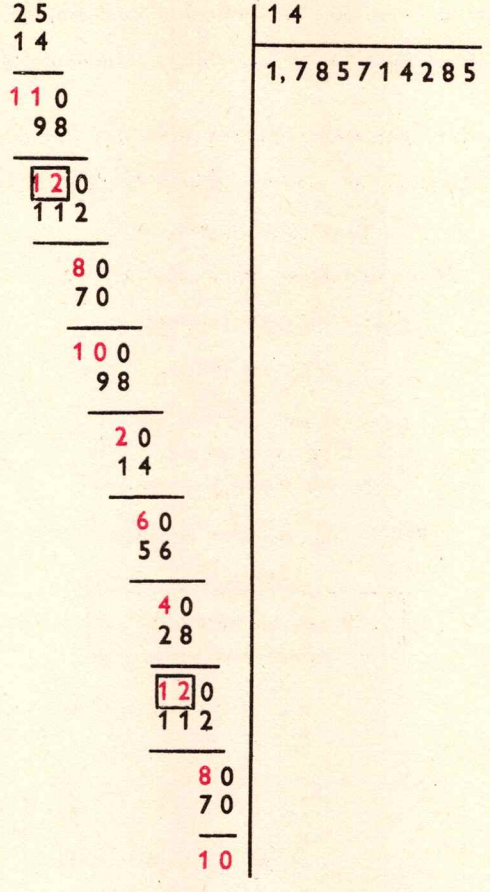
EJERCICIOS

Dibuja, utilizando pequeños puntos negros, un fragmento de $Z \times Z_o$ que comprenda 100 pares ordenados o cuplas

Ilustra la demostración anterior marcando con verde algunas de esas cuplas.

9 — NÚMEROS IRRACIONALES

Para calcular el decimal igual a 25/14 efectuamos la división euclideana de 25 por 14



los **sucesivos restos** están escritos en rojo.

Sabemos que cada uno de ellos es a lo sumo igual a 13

Luego, 0, 1, 2, 3, . . ., 12, 13 son los únicos valores posibles para esos restos.

De antemano, ya nos habíamos asegurado que toda sucesión de 15 restos seguidos presenta por lo menos una repetición.

En nuestro ejemplo, el segundo y el octavo resto son iguales.

Es claro que una vez que un resto iguala a un resto anterior, no se hace más que repetir un cálculo ya hecho.

$$25/14 = 1{,}7857142857142 \ldots 857142 \ldots$$

$$-25/14 = -1{,}7857142857142 \ldots 857142 \ldots$$

Decimales tales se llaman **periódicos.**

Todos los decimales limitados son periódicos puesto que

$$25{,}283 = 25{,}283000 \ldots 0 \ldots$$
$$= 25{,}282999 \ldots 9 \ldots$$

Expresemos brevemente el resultado obtenido:

Todo decimal racional es periódico,

y probemos que

Todo decimal periódico es racional.

DEMOSTRACIÓN:

Ya sabemos que todo decimal limitado es racional.

Falta examinar los decimales periódicos que no terminan ni en una sucesión ininterrumpida de 0, ni en una sucesión ininterrumpida de 9.

Mostremos que

$$0{,}273273 \ldots 273 \ldots = 273/999$$

Para calcular $273/999$, se efectúa la larga división euclideana

$$\begin{array}{r|l} 273 & 999 \\ \hline & \end{array}$$

Pero $273.000 = 273 \times 999 + 273$ y $0 \leqslant 273 < 999$

Luego

$$\begin{array}{r|l} 273{,}000 & 999 \\ \hline & 0{,}273 \\ \hline 273 & \end{array}$$

y el cálculo se repite

$$\begin{array}{l|l} 273{,}0000 \ldots & 999 \\ \hline & 0{,}273273 \ldots\ 273 \ldots \end{array}$$

$$0{,}273\,273 \ldots 273 \ldots = 273/999$$

$$-0{,}273\,273 \ldots 273 \ldots = -273/999$$

$$25{,}46\,273\,273 \ldots 273 \ldots$$

$$= 25{,}46 + 0{,}00\,273\,273 \ldots 273 \ldots$$

$$= 25{,}46 + 10^{-2} \times 0{,}273\,273 \ldots 273 \ldots \qquad \text{(ver § 1)}$$

$$= 25{,}46 + \frac{1}{100} \times \frac{273}{999}$$

$$= 25{,}46 + \frac{273}{99.900} \in Q \qquad \text{(puesto que } 25{,}46 \text{ y } \frac{273}{99.900} \in Q\text{)}.$$

TEOREMA

Un decimal es racional ssi es periódico

El número

0,10100100010000100000010000000 1 ... y *así siguiendo* ... no es periódico.

Existen, pues, reales no racionales.

DEFINICION — *Un número real se llama* **irracional ssi** *no es racional.*

$$\omega \subset Z \subset Q \subset R$$
$$\omega \neq Z \neq Q \neq R$$

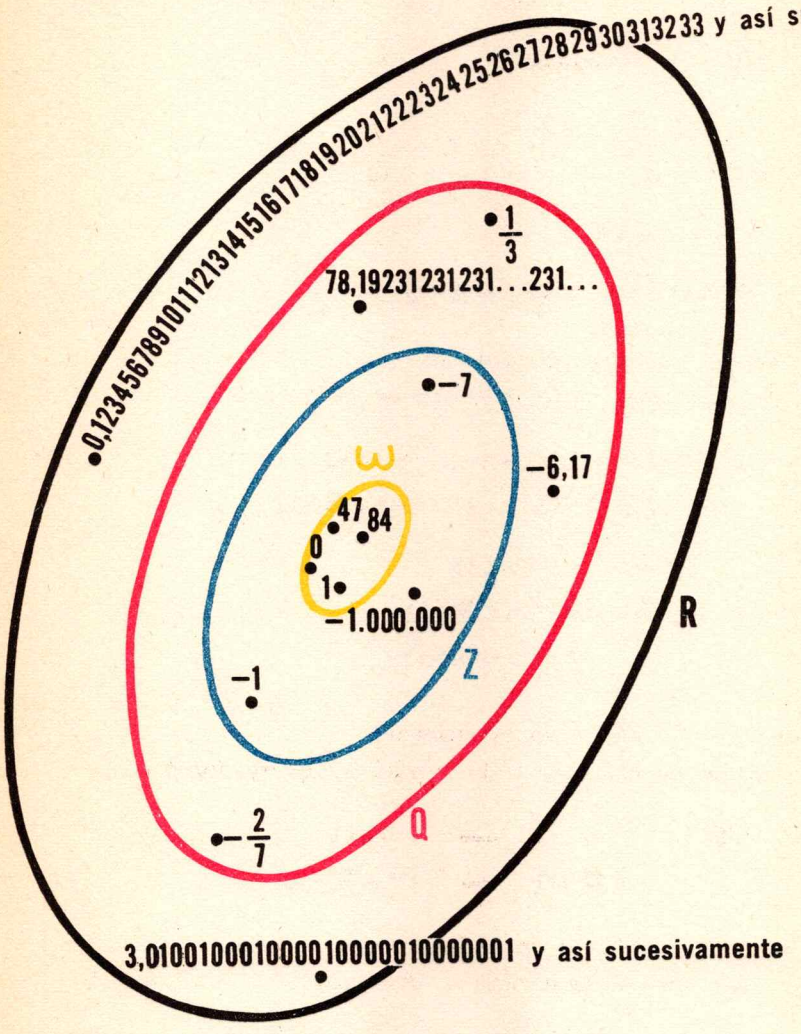

0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031323 3 y así sucesivamente
1/3
78,19231231231...231...
−7
−6,17
3
47
84
0
1
−1.000.000
Z
−1
R
Q
−2/7
3,010010001000010000010000001 y así sucesivamente

FIG. 290

EJERCICIOS

1. El número
287,631020030004000050000060000007 ... *y así siguiendo* ... es irracional.

2. Escribe diez números irracionales muy diferentes unos de los otros.

3. **Si** $a, b \in \mathbf{Q}$ **Entonces** $a - b \in \mathbf{Q}$

4. **Si** $a, b \in \mathbf{Q}$ y $x \in \mathbf{R}$
Entonces $x + b = a \Rightarrow x = a - b \in \mathbf{Q}$

5. $x, b \in \mathbf{Q} \Rightarrow x + b \in \mathbf{Q}$

6. $b \in \mathbf{Q}$ y $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \Rightarrow b + x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

7. La suma de dos racionales es racional.
La suma de un racional y de un irracional es irracional.

8. Para todo real r : $r \in \mathbf{Q} \iff -r \in \mathbf{Q}$
$r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \iff -r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

9. $a, b \in \mathbf{Q} \Rightarrow a - b \in \mathbf{Q}$
$a \in \mathbf{Q}, \ b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \Rightarrow a - b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$
$b - a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

10. La diferencia de dos racionales es racional.
La diferencia de un irracional y de un racional es irracional.

11. Para todo $r \in \mathbf{R}_0$: $r \in \mathbf{Q} \iff r^{-1} \in \mathbf{Q}$
$r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \iff r^{-1} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

12. Un real no nulo es racional **ssi** su inverso es racional.
Un real es irracional **ssi** su inverso es irracional.

13. $0 \in \mathbf{Q}$

Para todo $r \in \mathbf{R}$: $0 \cdot r \in \mathbf{Q}$

14. **Si** $a \in \mathbf{Q}$ y $b \in \mathbf{Q}_0$, **Entonces** $ab^{-1} \in \mathbf{Q}$

15. Si $a \in \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{Q}_0$, $x \in \mathbf{R}$,
Entonces $xb = a \Rightarrow x = a/b \in \mathbf{Q}$

16. Si $x, b \in \mathbf{Q}$, Entonces $xb \in \mathbf{Q}$

17. Si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{Q}_0$, Entonces $xb \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

18. El producto de dos racionales es racional.
El producto de un racional no nulo y de un irracional es un irracional.

19. Si $q \in \mathbf{Q}$, $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $qr \in \mathbf{Q}$ ¿Entonces?

20. Si $0 \neq a \in \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{Q}$, $x \in \mathbf{R}$
Entonces $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -b \setminus a \in \mathbf{Q}$

21. En el texto, hemos estudiado la representación decimal de los racionales y de los irracionales.

La representación binaria de los racionales y de los irracionales se hubiese presentado de manera completamente análoga.

Un binario es racional **ssi** es periódico.

Un binario es irracional **ssi** no es periódico.

22. Clave de la representación binaria de los racionales.

$$0{,}000001000001 \ldots 00001 \ldots = 1/111111$$

23. ¿Quieres escribir un irracional positivo menor que

$$0{,}0000001 \text{ etc.}?$$

He aquí una posible respuesta: $0{,}00000000101001001$ *y así siguiendo.*

24. Encuentra un racional q tal que

$$17{,}89345 \text{ etc} < q < 17{,}89356 \text{ etc.}$$

25. Encuentra un irracional i tal que

$$17{,}89345 \text{ etc} < i < 17{,}89356 \text{ etc.}$$

10 — DENSIDAD DEL CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES

Si $0 < r \in \mathbf{R}$

Entonces existe $q \in \mathbf{Q}$ tal que $0 < q < r$

En efecto, si $r = 0{,}0000007$ etc.

basta elegir $q = 0{,}00000001 \in \mathbf{Q}$

TEOREMA

Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $a < b$

Entonces existe $q \in \mathbf{Q}$ tal que $a < q < b$

lo cual se expresa brevemente diciendo que

$\mathbf{Q}$ es una parte densa de $\mathbf{R}$

DEMOSTRACIÓN:

1) **Uno de los números a, b es racional**

Si $a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{R}$

y $a < b$

Entonces $0 < b - a$

existe $s \in \mathbf{Q}$ tal que

$0 < s < b - a$

De donde

$$a + 0 < a + s < a + b - a$$

$$a < a + s < b$$

lo cual establece la proposición

puesto que $a + s \in \mathbf{Q}$

Si $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{Q}$

y $a < b$

Entonces $0 < b - a$

existe $s \in \mathbf{Q}$ tal que

$0 < s < b - a$

De donde $a - b < -s < 0$

$$b + a - b < b - s < b + 0$$

$$a < b - s < b$$

lo cual establece la proposición

puesto que $b - s \in \mathbf{Q}$

2) Los dos números, a y b, son irracionales.

$$a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad a < b$$

Representemos a y b mediante puntos de D_{01}

Si a y b pertenecen a todos los segmentos de una misma sucesión de segmentos binarios encajados

Entonces se tendría $a = b$, lo cual es imposible puesto que $a < b$

Luego existen binarios c, q, d tales que

$$c \leqslant a \leqslant q \leqslant b \leqslant d$$

a y b son irracionales y q racional, luego $a \neq q \neq b$

de donde $a < q < b$

l.q.q.d.

∴

He aquí los reales a, b

Luego

$a < b \Rightarrow$	existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$	$a < q < b$
$q < b \Rightarrow$	existe $q_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $q < q_1 < b$	$a < q < q_1 < b$
$q_1 < b \Rightarrow$	existe $q_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $q_1 < q_2 < b$	$a < q < q_1 < q_2 < q$
etc		etc.

Entonces $\{q \in \mathbb{Q} \mid a < q < b\}$ es una parte infinita de $\mathbb{Q}$

De donde

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ **Entonces** $\# \{q \in \mathbb{Q} \mid a < q < b\} = \delta$

11 — POTENCIA DEL CONTINUO

PROPOSICIÓN 1

Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $a < b$

Entonces $]a, b[\;\#\;]0; 1[$

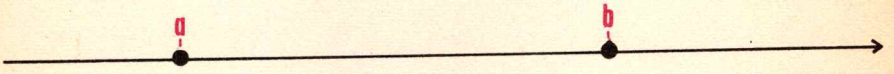
Dicho de otro modo:

PROPOSICIÓN 1

Todos los intervalos abiertos no vacíos de **R** *son equipotentes.*

DEMOSTRACIÓN:

Representemos a y b mediante puntos de D_{01}



Nueva referencia

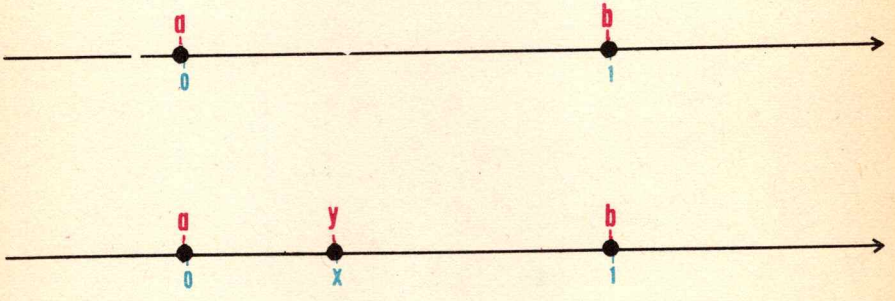


FIG. 291

$]0;1[\rightarrow]a, b[\;:\; x \rightarrow y$ es una biyección

Luego $]0; 1[\;\#\;]a, b[$

l.q.q.d.

PROPOSICIÓN 2

$$]0; 1[\ \# \ . \ R$$

DEMOSTRACIÓN:

En virtud de la proposición 1,

Si $a, b, c, d \in R$ y $a \neq b$ y $c \neq d$,

Entonces existe una biyección $]a, b[\rightarrow]c, d[$.

La figura siguiente muestra que es fácil construir una biyección $]0; 1[\rightarrow R$

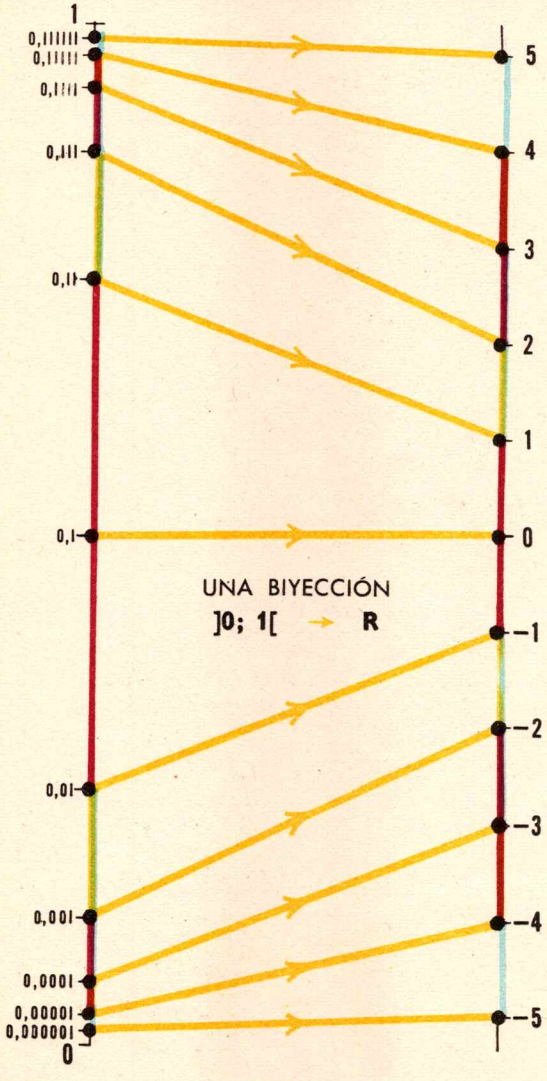


FIG. 292

Todo real perteneciente a $]0;1[$ se escribe **de una y sólo una manera** como decimal ilimitado que no termina en una sucesión ininterrumpida de 9.

$$0, v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 \dots v_n v_{n+1} \dots \qquad \text{(por lo menos uno de los } v_i \neq 0\text{)}$$

y todo decimal de esta forma define uno y sólo un elemento de $]0;1[$

TEOREMA DE CANTOR

Ninguna sucesión de elementos de $]0;1[$ comprende todos los elementos de $]0;1[$

Dicho de otro modo:

TEOREMA DE CANTOR

$]0;1[$ no es numerable

DEMOSTRACIÓN:

He aquí una sucesión de elementos de

1) $0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7$ etc. $= b$
2) $0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7$ etc. $= c$
3) $0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7$ etc. $= d$
4) $0, e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7$ etc. $= e$
5) $0, f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7$ etc. $= f$
6) $0, g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6 g_7$ etc. $= g$
7) $0, h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6 h_7$ etc. $= h$

etc.

Esta sucesión no comprende el real $a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$ etc. $\in]0;1[$ donde los a_i son cifras distintas de 0 y de 9 y tales que

$a_1 \neq b_1$	de donde $a \neq b$
$a_2 \neq c_2$	de donde $a \neq c$
$a_3 \neq d_3$	de donde $a \neq d$
$a_4 \neq e_4$	de donde $a \neq e$
$a_5 \neq f_5$	de donde $a \neq f$
$a_6 \neq g_6$	de donde $a \neq g$
$a_7 \neq h_7$	de donde $a \neq h$

etc. l.q.q.d.

DEFINICIÓN

$$\gamma = \# \mathbf{R} = \# \,]0; 1[$$

El cardinal γ *se llama también el* **continuo** *o la* **potencia del continuo.**

$]0; 1[$ es infinito; luego $\delta \leqslant \gamma = \# \,]0; 1[$

El teorema de Cantor precisa $\delta \neq \gamma = \# \,]0; 1[$

De donde $\delta < \gamma$

TEOREMA DE CANTOR

R no es numerable

$$\delta < \gamma = \# \mathbf{R}$$

— ¿Quieres ordenar los cardinales que conoces?

— $0 < 1 < 2 < \ldots < n < n + 1 < \ldots < \delta < \gamma$

$$\begin{array}{ccccccccc} & \omega & \subset & \mathbf{Z} & \subset & \mathbf{Q} & \subset & \mathbf{R} & \\ & \omega & \neq & \mathbf{Z} & \neq & \mathbf{Q} & \neq & \mathbf{R} & \\ \delta = \# \omega & = & \# \mathbf{Z} & = & \# \mathbf{Q} & < & \# \mathbf{R} & = & \gamma \end{array}$$

EJERCICIOS

1.

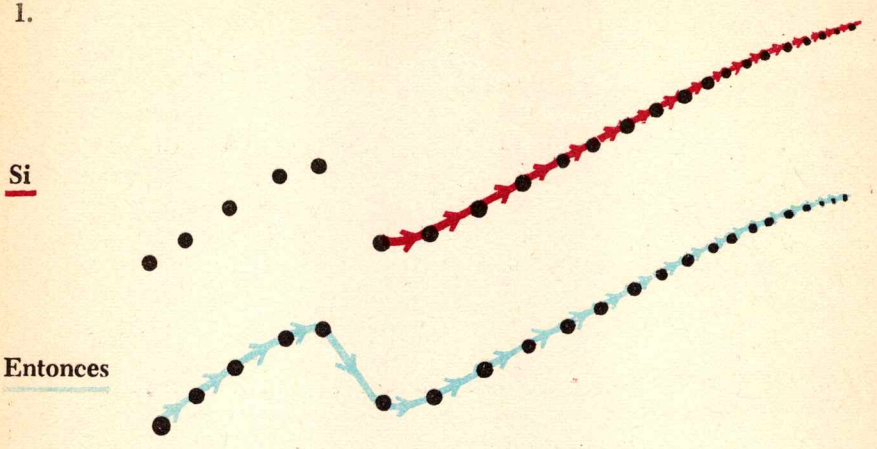


FIG. 293

$$\text{Para todo } n \in \omega \quad : \quad n + \delta = \delta$$

2. $\delta = \# (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) = \# \mathbf{Z} \,.\, \# \mathbf{Z} = \delta \,.\, \delta$

$$\delta \,.\, \delta = \delta$$

3. $\{1, 2, \ldots, n\} \times \mathbf{Z}$ es una parte infinita de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$

$\{1, 2, \ldots, n\} \times \mathbf{Z}$ es numerable

$\# (\{1, 2, \ldots, n\} \times \mathbf{Z}) = \delta$

$\delta = \# (\{1, 2, \ldots, n\} \times \mathbf{Z}) = \# \{1, 2, \ldots, n\} \,.\, \# \mathbf{Z} = n \,.\, \delta$

$$\text{Para todo } n \in \omega_o \quad : \quad n \,.\, \delta = \delta$$

En particular,

$$\delta + \delta = \delta$$

4. Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $a < b$,

Entonces $\# \,]a, b[\; = \# \,[a, b] \; = \# \,]a, b] = \# \,[a, b[= \gamma$

5. $\# \mathbf{R}^+ = \# \mathbf{R}^+_0 = \gamma$

(La demostración surge de la fig. p. 349)

6. **Si** D es una parte numerable de un conjunto C de cardinal γ,

Entonces $C \setminus D$ es infinito y no numerable

En efecto $\# C = \# D + \# (C \setminus D)$

$\# C = \delta + \# (C \setminus D)$

- **Si** $\# (C \setminus D) = n \in \omega$, se tendría $\# C = \delta + n = \delta$
- **Si** $\# (C \setminus D) = \delta$, se tendría $\# C = \delta + \delta = \delta$

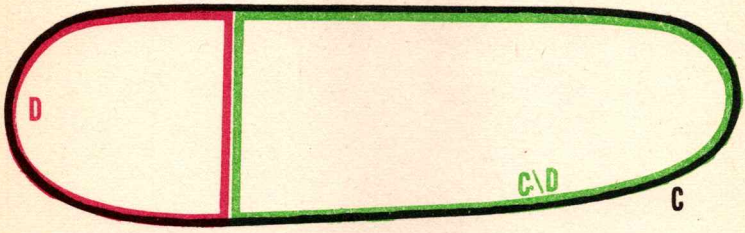
... lo cual es imposible, puesto que $\# C = \gamma \neq \delta$

Luego $C \setminus D$ no es ni finito, ni numerable.

El conjunto $C \setminus D$ es infinito no numerable.

7. He aquí una parte numerable D del conjunto C de cardinal γ

Luego **D es numerable y $C \setminus D$ es infinito** (ver ejercicio 6)



D ES EL CONJUNTO DE PUNTOS DE UNA SEGUIDILLA — FIG. 294 — SE PUEDE DEFINIR UNA SEGUIDILLA EN **C\D**

Llamemos E al conjunto de puntos de esta seguidilla

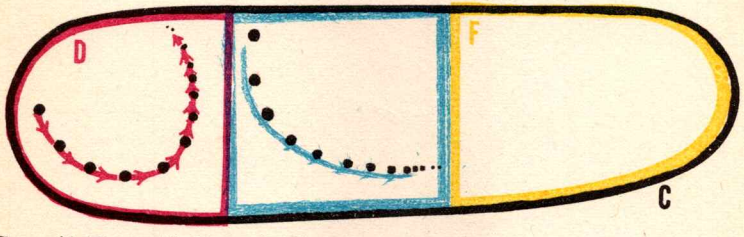


FIG. 295

$\# C = \# D + \# E + \# F = \delta + \delta + \# F = \delta + \# F$

$\# (C \setminus D) = \# E + \# F = \delta + \# F$

Luego $\# C = \# (C \setminus D)$

$\# (C \setminus D) = \gamma$

8. **Si** D es una parte numerable del conjunto C de cardinal γ,
Entonces $\#(C \setminus D) = \gamma$

9. Q es una parte numerable del conjunto **R** de cardinal γ
$\#(\mathbf{R} \setminus Q) = \gamma$

10. El conjunto de números irracionales tiene la potencia del continuo.

11. **Si** $a, b \in \mathbf{R}$ y $a < b$,
Entonces $\#[a, b] = \gamma$
$\{q \in Q \mid a \leqslant q \leqslant b\}$ es una parte numerable de $[a, b]$
$\{i \in \mathbf{R} \setminus Q \mid a \leqslant i \leqslant b\} = [a, b] \setminus \{q \in Q \mid a \leqslant q \leqslant b\}$
$\#\{i \in \mathbf{R} \setminus Q \mid a \leqslant i \leqslant b\} = \gamma$

12. Todo intervalo no vacío de números reales
contiene un conjunto numerable de racionales
un conjunto de irracionales que tiene la potencia del continuo.

13. **Si** $a, b \in \mathbf{R}$ y $a < b$,
Entonces existe un irracional i tal que $a < i < b$

14. ¿Qué significa la proposición: **P** es una parte densa de **R**?

P es una parte densa de R

ssi

$a, b \in \mathbf{R}$ y $a < b$ $\Rightarrow$ existe $p \in P : a < p < b$

15. En § 10, hemos demostrado en realidad que
Si $a, b \in \mathbf{R}$ y $a < b$,
Entonces existe un decimal limitado x tal que $a < x < b$

16. El conjunto D de decimales limitados es una parte densa de **R**.

17. El conjunto B de binarios limitados es una parte densa de **R**.

18. El conjunto Q de racionales es una parte densa numerable de **R**.

19. El conjunto $\mathbf{R} \setminus Q$ de números irracionales es una parte densa, no numerable de **R**.

20. **R** es una parte densa de **R**.

21. ϕ y **Z** son partes no densas de **R**.

22. **Si** $a, b \in Q$ y $a < b$,
Entonces $\frac{a+b}{2} \in Q$ y $a < \frac{a+b}{2} < b$

23. Para todo $r \in \mathbf{R}_o$: $r \,.\, \mathbf{R} = \mathbf{R}$

24. $o.\mathbf{R} = o.Q = o.\mathbf{Z} = \{o\}$

25. $o.\mathbf{R}$ es un sub-grupo de $\mathbf{R}, +$

26 $o.\mathbf{R}$ no es un sub-cuerpo de $\mathbf{R}, +, .$

27. Para todo $q \in Q_o$: $q.Q = Q$

28. Para todo $r \in \mathbf{R}$: $r.Q$ es un sub-grupo de $\mathbf{R}, +$

29. Para todo $r \in \mathbf{R} \setminus Q$: $r.Q \cap Q = \{o\}$

30. Para todo $r \in \mathbf{R}_o$: $r\,\mathbf{Z}, +$ es un grupo isomorfo a $\mathbf{Z}, +$

31. **Si** $q \in Q$, **Entonces** $q.\mathbf{Z} \subset Q$

32. Para todo $r \in \mathbf{R}$: $r.\mathbf{Z} = (-r).\mathbf{Z}$

33. Para todo $n \in \omega$: $n\,\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$

34. Para todo $z \in \mathbf{Z}$: $z.\mathbf{Z}$ es el menor sub-grupo de $\mathbf{Z}, +$ que comprende z

15

Los vectoriales

1 — EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbf{R}, \Pi_0, +$

Reunamos algunas propiedades fundamentales establecidas en los capítulos 1 y 11.

1. $\Pi_0, +$ es un **grupo conmutativo.**	$\Pi_0, +$ es un grupo conmutativo.
2. La **multiplicación escalar**	Para todo $a, b \in \mathbf{R}$ y todo $\vec{u}, \vec{v} \in \Pi_0$:
a) es **asociativa**	$a\vec{v} \in \Pi_0$ $a \cdot b\vec{v} = ab \cdot \vec{v}$
b) distribuye **la adición de reales** **la adición de vectores.**	$(a + b) \cdot \vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
c) admite $1 \in \mathbf{R}$ como **neutro**	$1\vec{v} = \vec{v}$

El conjunto de propiedades 1, 2 (a, b, c) se expresa diciendo que

$\mathbf{R}, \Pi_0, +$
es un **ESPACIO VECTORIAL**

2 — DEFINICIÓN DE VECTORIALES (O ESPACIOS VECTORIALES) REALES

DEFINICIÓN

R, V, + es un **VECTORIAL**

ssi

1. **V, +** es un **grupo conmutativo**

2. Para todo $a, b, \in R$; para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$:

$$a\vec{v} \in V \quad (1)$$

$$a \cdot b\vec{v} = ab \cdot \vec{v} \quad (2)$$

$$(a + b) \cdot \vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v} \quad (3)$$

$$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v} \quad (4)$$

$$1\vec{v} = \vec{v} \quad (5)$$

La fórmula (1) define **la multiplicación escalar** del vectorial R, V, +:

$$R \times V \rightarrow V : (r, \vec{v}) \rightarrow r\vec{v}$$

La fórmula (2) afirma que **la multiplicación escalar** es **asociativa.**

La fórmula (3) afirma que **la multiplicación escalar distribuye la adición** de R, +

Observa bien que el primer + de esta fórmula designa la adición de reales y el segundo +, la adición de vectores.

La fórmula (4) afirma que **la multiplicación escalar distribuye la adición** de V, +

La fórmula (5) afirma que $1 \in R$ es **neutro** para la **multiplicación escalar.**

Anotaremos $\vec{o}$ el neutro de V, +

A menudo, los elementos de V se llaman **vectores.**

3 — LOS ESPACIOS VECTORIALES SON LAS MÁQUINAS INDUSTRIALES DE LA MATEMÁTICA MODERNA

Habrás reconocido que las propiedades que nos permitieron decir que

$$R, \Pi_0, + \text{ es un } \textbf{espacio vectorial}$$

son muy importantes.

¿No las has aplicado varias veces para resolver "por el cálculo vectorial" ciertos problemas de geometría?

La definición de espacios vectoriales es fundamental, porque éstos se usan constantemente en todas las ramas de la matemática y en todos los dominios de aplicación.

Los espacios vectoriales son verdaderas **máquinas industriales.**

Ellas trabajan para ti, con la condición de que tú aprendas a utilizarlas.

¡Te ayudaremos a que sea así!

***

Principalmente en el capítulo 11, pusimos en evidencia y utilizamos reglas de cálculo que no figuran explícitamente en la definición de vectoriales.

En el parágrafo 4 verás, sin embargo, que estas reglas, que conviene tener presentes, se deducen fácilmente de las propiedades que figuran en la definición de vectoriales.

¡Estas reglas serán, pues, válidas en cualquier espacio vectorial!

4 — CÁLCULO EN UN ESPACIO VECTORIAL

He aquí un vectorial $R, V, +$

Para todo $a, b, c, d, r, a_1, \ldots, a_n \in R$ y $n \in \omega$:

Para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$:

1. $0\vec{v} = \vec{o} + 0\vec{v}$ ($\vec{o}$ es el neutro del grupo V, $+$)

$= (-0\vec{v} + 0\vec{v}) + 0\vec{v}$ ($-0\vec{v}$ es el opuesto de $0\vec{v}$)

$= -0\vec{v} + (0\vec{v} + 0\vec{v})$ (asociatividad de $+$)

$= -0\vec{v} + (0 + 0)\vec{v}$ (§ 2, definición 2 (3))

$= -0\vec{v} + 0\vec{v}$ (0 es el neutro de R, $+$)

$= \vec{o}$ ($-0\vec{v}$ es el opuesto de $0\vec{v}$)

2. $r\vec{o} = \vec{o} + r\vec{o}$ ($\vec{o}$ es el neutro del grupo V, $+$)

$= (-r\vec{o} + r\vec{o}) + r\vec{o}$ ($-r\vec{o}$ es el opuesto de $r\vec{o}$)

$= -r\vec{o} + (r\vec{o} + r\vec{o})$ (asociatividad de $+$)

$= -r\vec{o} + r(\vec{o} + \vec{o})$ (§ 2, definición 2(4))

$= -r\vec{o} + r\vec{o}$ ($\vec{o}$ es el neutro del grupo V, $+$)

$= \vec{o}$ ($-r\vec{o}$ es el opuesto de $r\vec{o}$)

$$0\vec{v} = \vec{o} = r\vec{o}$$

3. $(-a)\vec{v} = \vec{o} + (-a)\vec{v}$ ($\vec{o}$ es el neutro del grupo V, $+$)

$= (-a\vec{v} + a\vec{v}) + (-a)\vec{v}$ ($-a\vec{v}$ es el opuesto de $a\vec{v}$)

$= -a\vec{v} + (a\vec{v} + (-a)\vec{v})$ (asociatividad de la ley de V, $+$)

$= -a\vec{v} + (a + (-a))\vec{v}$ (§ 2, definición 2(3))

$= -a\vec{v} + 0\vec{v}$ ($-a$ es el opuesto de a en el grupo R, $+$)

$= -a\vec{v} + \vec{o}$ (nº 1)

$= -a\vec{v}$ ($\vec{o}$ es el neutro del grupo V, $+$)

4. $a(-\vec{v}) = \vec{o} + a(-\vec{v})$ ($\vec{o}$ es el neutro del grupo V, $+$)

$= (-\vec{av} + \vec{av}) + a(-\vec{v})$ ($-\vec{av}$ es el opuesto de $\vec{av}$ en V, $+$)

$= -\vec{av} + (\vec{av} + a(-\vec{v}))$ (asociatividad de la ley de V, $+$)

$= -\vec{av} + a(\vec{v} + (-\vec{v}))$ (§ 2, definición 2(4))

$= -\vec{av} + a\,\vec{o}$ ($-\vec{v}$ es el opuesto de $\vec{v}$ en V, $+$)

$= -\vec{av} + \vec{o}$ (nº 2)

$= -\vec{av}$

5. $(-a) \cdot (-\vec{v}) = -(a(-\vec{v}))$ (nº 3)

$= -(-\vec{av})$ (nº 4)

$= \vec{av}$ (en el grupo V, $+$)

Regla de los signos

$$(-a)\vec{v} = -\vec{av} = a(-\vec{v})$$
$$(-a)(-\vec{v}) = \vec{av}$$

6. $(a - b) \cdot \vec{v} = (a + (-b)) \cdot \vec{v}$ (definición de la sustracción de reales)

$= a \cdot \vec{v} + (-b)\vec{v}$ (§ 2, definición 2(3))

$= \vec{av} + (-\vec{bv})$ (nº 3)

$= \vec{av} - \vec{bv}$ (definición de la sustracción en el grupo V, $+$)

7. $a(\vec{u} - \vec{v}) = a(\vec{u} + (-\vec{v}))$ (definición de la sustracción en V, $+$)

$= \vec{au} + a(-\vec{v})$ (§ 2, definición 2(4))

$= \vec{au} + (-\vec{av})$ (nº 4)

$= \vec{au} - \vec{av}$ (definición de la sustracción en V, $+$)

$$(a - b)\vec{v} = \vec{av} - \vec{bv}$$
$$a(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{au} - \vec{av}$$

Muy brevemente: La multiplicación escalar distribuye las sustracciones.

8. $(a + b + c)\vec{v} = ((a + b) + c)\vec{v}$ (asociatividad de la adición de reales)

$= (a + b)\vec{v} + c\vec{v}$ (§ 2, definición 2(3))

$= (a\vec{v} + b\vec{v}) + c\vec{v}$ (§ 2, definición 2(3))

$= a\vec{v} + b\vec{v} + c\vec{v}$ (asociatividad de la ley de V, $+$)

9. $(a + b + c + d)\vec{v} = ((a + b + c) + d)\vec{v}$ (asociatividad de la adición de reales)

$= (a + b + c)\vec{v} + d\vec{v}$ (§ 2, definición 2(3))

$= (a\vec{v} + b\vec{v} + c\vec{v}) + d\vec{v}$ (nº 8)

$= a\vec{v} + b\vec{v} + c\vec{v} + d\vec{v}$ (asociatividad de la ley de V, $+$)

10. $\boxed{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\vec{v} = a_1\vec{v} + a_2\vec{v} + \ldots + a_n\vec{v}}$

11. $a(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = a((\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w})$ (asociatividad de la ley del grupo V, $+$)

$= a(\vec{u} + \vec{v}) + a\vec{w}$ (§ 2, definición 2(4))

$= (a\vec{u} + a\vec{v}) + a\vec{w}$ (§ 2, definición 2(4))

$= a\vec{u} + a\vec{v} + a\vec{w}$ (asociatividad en el grupo V, $+$)

12. $a(\vec{x} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = a(\vec{x} + (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}))$ (asociatividad de la ley de V, $+$)

$= a\vec{x} + a(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$ (§, definición 2(4)

$= a\vec{x} + (a\vec{u} + a\vec{v} + a\vec{w})$ (nº 11)

$= a\vec{x} + a\vec{u} + a\vec{v} + a\vec{w}$ (asociatividad en V, $+$)

13. $\boxed{a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n) = a\vec{v}_1 + a\vec{v}_2 + \ldots + a\vec{v}_n}$

14. $n\vec{v} = (1 + \ldots + 1)\vec{v}$ (n términos 1)

$= 1 \cdot \vec{v} + \ldots + 1\vec{v}$ (n términos $1\vec{v}$) (nº 10)

$= \vec{v} + \ldots + \vec{v}$ (n términos $\vec{v}$)

15. $(-n)\vec{v} = -n\vec{v} = n(-\vec{v}) = -n\vec{v} = -(\vec{v} + \ldots + \vec{v})$

$= n(-\vec{v}) = -\vec{v} - \vec{v} \ldots - \vec{v}$

5 — LA MULTIPLICACIÓN ESCALAR NO ADMITE DIVISORES DE CERO

He aquí un real a, un vector $\vec{v}$ y el producto $a\vec{v}$

Sabes que $a = 0 \implies a\vec{v} = \vec{o}$ (§ 4, nº 1)

$\vec{v} = \vec{o} \implies a\vec{v} = \vec{o}$ (§ 4, nº 2)

¡Condensemos!

$$a = 0 \text{ o } \vec{v} = \vec{o} \implies a\vec{v} = \vec{o}$$

Vamos a probar la

PROPOSICIÓN

$$(a = 0 \text{ o } \vec{v} = \vec{o}) \iff a\vec{v} = \vec{o}$$

que se expresa brevemente diciendo que

La multiplicación escalar no admite divisores de cero.

DEMOSTRACIÓN

Falta probar que $a\vec{v} = \vec{o} \implies (a = 0 \text{ o } \vec{v} = \vec{o})$

Si

$a\vec{v} = \vec{o}$

Entonces

o bien $a = 0$

o bien $a \neq 0$

$a^{-1} \in R$ y $a^{-1} \cdot a = 1$

de donde el cálculo

$$\vec{o} = a^{-1}\vec{o}$$
$$= a^{-1} \cdot a\vec{v} \quad (\text{porque } \vec{o} = a\vec{v})$$
$$= a^{-1}a \cdot \vec{v}$$
$$= 1 \cdot \vec{v}$$
$$= \vec{v}$$

$a = 0$ o $\vec{v} = \vec{o}$

l.q.q.d.

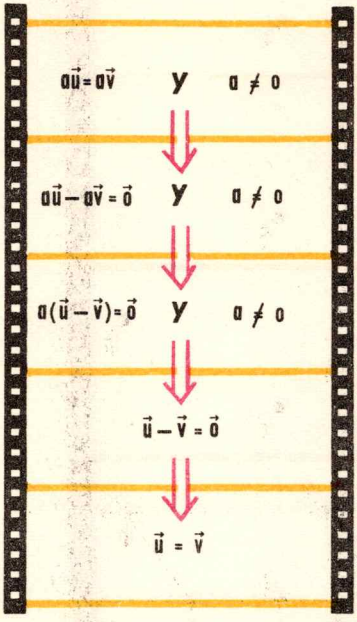
$$a\vec{v} = \vec{o} \iff (\vec{v} = \vec{o} \text{ o } a = 0)$$

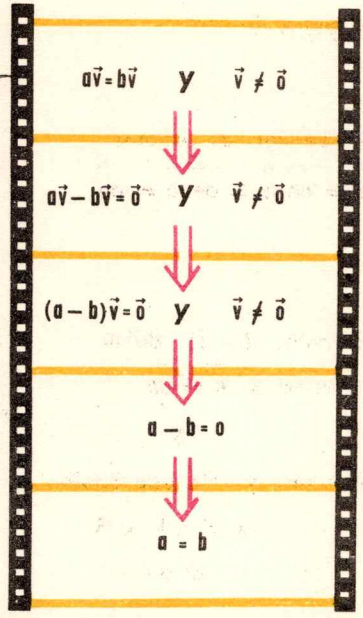
$$(a\vec{v} = \vec{o} \text{ y } \vec{v} \neq \vec{o}) \iff a = 0$$

PROPOSICIÓN

$(\vec{au} = \vec{av} \quad y \quad a \neq 0) \Longrightarrow \vec{u} = \vec{v}$ y $(\vec{av} = \vec{bv} \quad y \quad \vec{v} \neq \vec{o}) \Longrightarrow a = b$

DEMOSTRACIÓN





l.q.q.d. FIG. 296 l.q.q.d.

EJERCICIOS

1. He aquí los reales a, b, c, d, f, g y los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de un vectorial R, V, +

$$a(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) - a(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) =$$

$$(a + b)(\vec{u} - \vec{v}) =$$

$$(a - b + c)(\vec{u} - \vec{v}) =$$

$$(a + b)(\vec{u} - \vec{v}) - (a - b)(\vec{u} + \vec{v}) =$$

$$(a + b)(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{o} \iff (a = -b \text{ ou } \vec{u} = \vec{v})$$

$$a(\vec{bu} + \vec{cv}) + d(\vec{fu} + \vec{gv}) = \ldots \vec{u} + \ldots \vec{v}$$

2. He aquí los reales x_1, y_1, x_0, y_0 y los vectores $\vec{e}, \vec{u}$

$$(x_1\vec{e} + y_1\vec{u}) + (x_0\vec{e} + y_0\vec{u}) = (x_1 + x_0)\vec{e} + (y_1 + y_0)\vec{u}$$

6 — BASES — COORDENADAS — REFERENCIAS

He aquí tres puntos no alineados

o, e, u

del plano Π

Ellos definen los vectores

$\vec{o} = \overrightarrow{oo}$, $\vec{e} = \overrightarrow{oe}$, $\vec{u} = \overrightarrow{ou}$

Todo punto $p \in \Pi$ define un vector y $\vec{p} = \overrightarrow{op}$

y

existe una y solo una cupla

$(x, y) \in R \times R$

tal que

$$\vec{p} = x\vec{e} + y\vec{u}$$

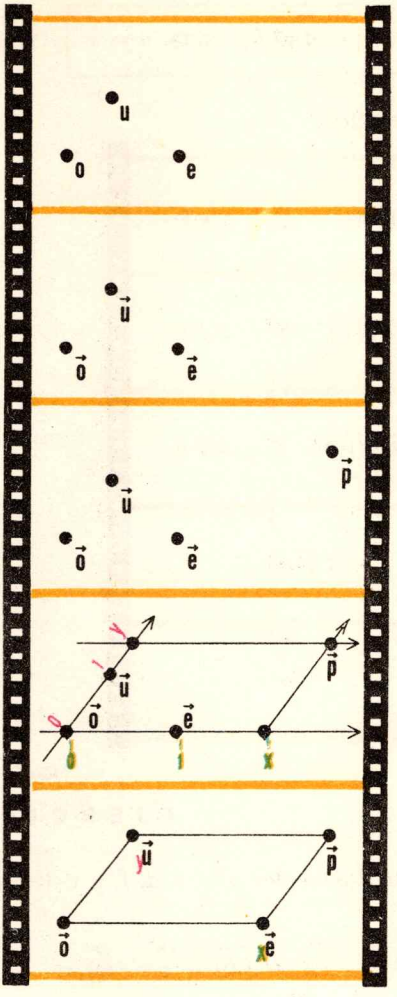


FIG. 297

Estos hechos se expresan diciendo que

$(\vec{e}, \vec{u})$ es una **BASE** del **VECTORIAL** $R, \Pi_o, +$

(x, y) es la **COORDENADA** del vector $\vec{p}$, en la base $(\vec{e}, \vec{u})$

(x, y) es la **COORDENADA** del punto p, con respecto a la **REFERENCIA** (o, e, u)

El punto o se llama **origen** de la referencia.

DEFINICIÓN

La cupla de vectores $(\vec{e}, \vec{u}) \in \Pi_0 \times \Pi_0$ *es una*

BASE *del* **VECTORIAL** $\mathbf{R}, \Pi_0, +$

ssi

Para todo $\vec{p} \in \Pi_0$, *existe* **una y sólo una** *cupla:* $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

tal que $\vec{p} = x\vec{e} + y\vec{u}$

Recordemos que **si** $o, e, u \in \Pi$, **entonces**

$$\vec{oe} \;//\; \vec{ou} \iff o, e, u \text{ alineados}$$

Acabamos de establecer el

TEOREMA

Toda cupla de vectores no paralelos de Π_0

es

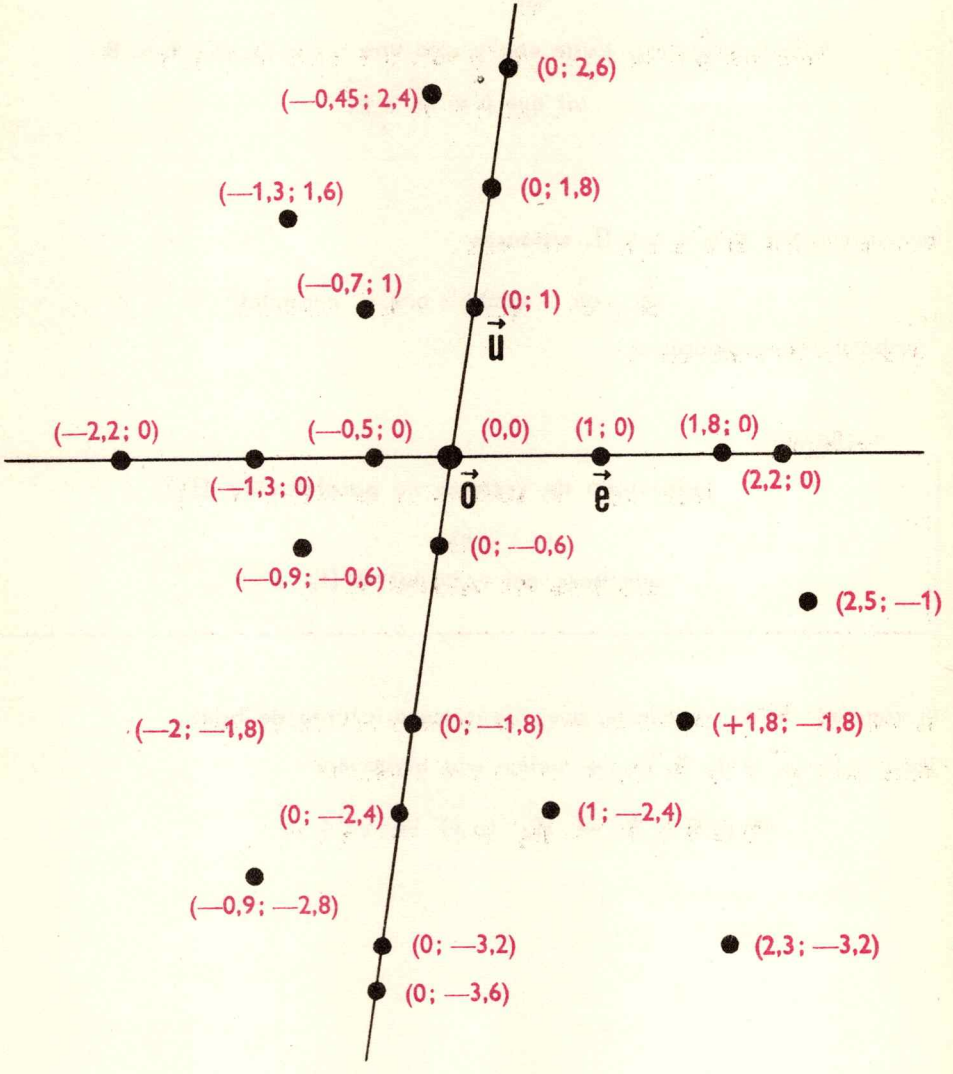
una base del vectorial $\mathbf{R}, \Pi_0, +$

El vectorial $\mathbf{R}, \Pi_0, +$ admite, pues, un **número infinito de bases**

Toda base $(\vec{e}, \vec{u})$ de $\mathbf{R}, \Pi_0, +$ define una **biyección**:

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \Pi_0 : (x, y) \to x\vec{e} + y\vec{u}$$

A menudo, cuando una base de Π_0 (o una referencia de Π) se ha fijado claramente, se designará un vector de Π_0 (o un punto de Π) por medio de su coordenada.



ALGUNOS PUNTOS DE Π Y SUS COORDENADAS CON RESPECTO A LA REFERENCIA (o, e, u)

FIG. 298

EJERCICIOS

1. Fija una referencia (o, e, u) de Π.
Marca los puntos de coordenadas (0 ; 0), (2 ; 0), (0 ; 2), (0 ; —2), (1 ; 0), (—2 ; 0), (1 ; 1), (0 ; 1), (—1 ; —1), (1 ; —1), (—1 ; 1), (—0,5 ; 3,5).

2. Fija una referencia (o, e, u) de Π.
Marca unos veinte puntos al azar y determina sus coordenadas.

3. Una vez fijada la referencia (o, e, u) de Π,
pongamos $X = o\,e$ y $Y = o\,u$

Designando los puntos por sus coordenadas, la recta Y es el conjunto de los $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tales que $x = 0$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x = 0\}$$

Brevemente,

$$Y \equiv x = 0$$

lo cual se lee

Y está definida por la ecuación $\boxed{x = 0}$

Establece, análogamente, que

$$X \equiv y = 0$$

4. Fija la referencia (o, e, u) de Π,
Marca el punto p de coordenada (2, 3)
Llamemos A a la paralela a X que comprende p

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 3\}$$
$$A \equiv y = 3$$

A está definida por la ecuación $y = 3$
Llamemos B a la paralela a Y que comprende p

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \quad\}$$
$$B \equiv$$

5. Fija una referencia (o, e, u) de Π.
¿Cuáles son los conjuntos

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x = -3\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = -2\}$$
$$F \equiv x = 1{,}75$$
$$G \equiv y = -2{,}05\ ?$$

¿Cuál es el punto de intersección de las rectas F y G?

6.

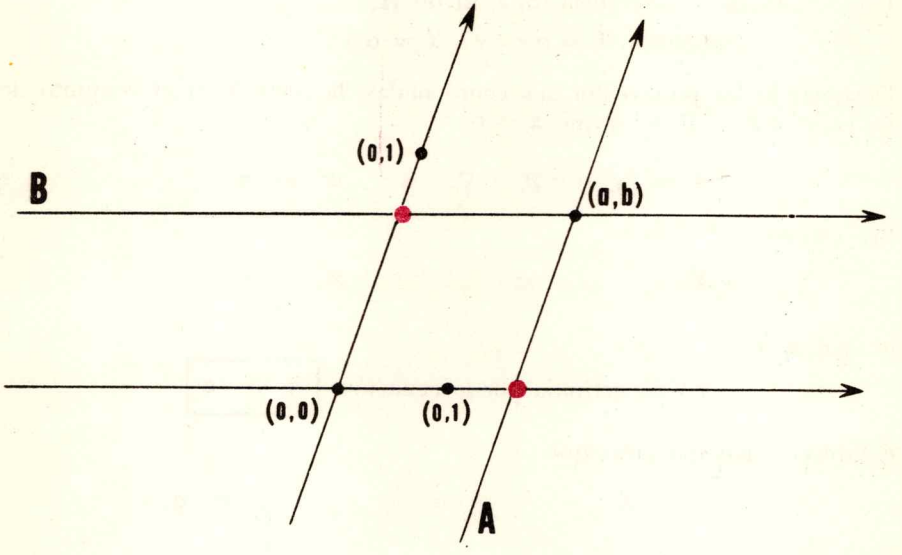


FIG. 299

¿Coordenadas de los puntos rojos?

A ≡ ... ?
B ≡ ... ?

7. $(\vec{v}, 2\vec{v})$ no es una base del vectorial $\mathbf{R}, \Pi_0, +$

8. $(\vec{v}, \vec{v})$ no es una base del vectorial $\mathbf{R}, \Pi_0, +$

9. $(\vec{o}, \vec{v})$ no es una base del vectorial $\mathbf{R}, \Pi_0, +$

7 — ADICIÓN DE VECTORES Y COORDENADAS

Fijemos la base $(\vec{e}, \vec{u})$ del vectorial $\mathbf{R}, \Pi_0, +$

Problema:

(x_1, y_1) *es la coordenada del yector* $\vec{v}_1 \in \Pi_0$

(x_2, y_2) *es la coordenada del vector* $\vec{v}_2 \in \Pi_0$

¿Cuál es la coordenada del vector $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$?

Solución:

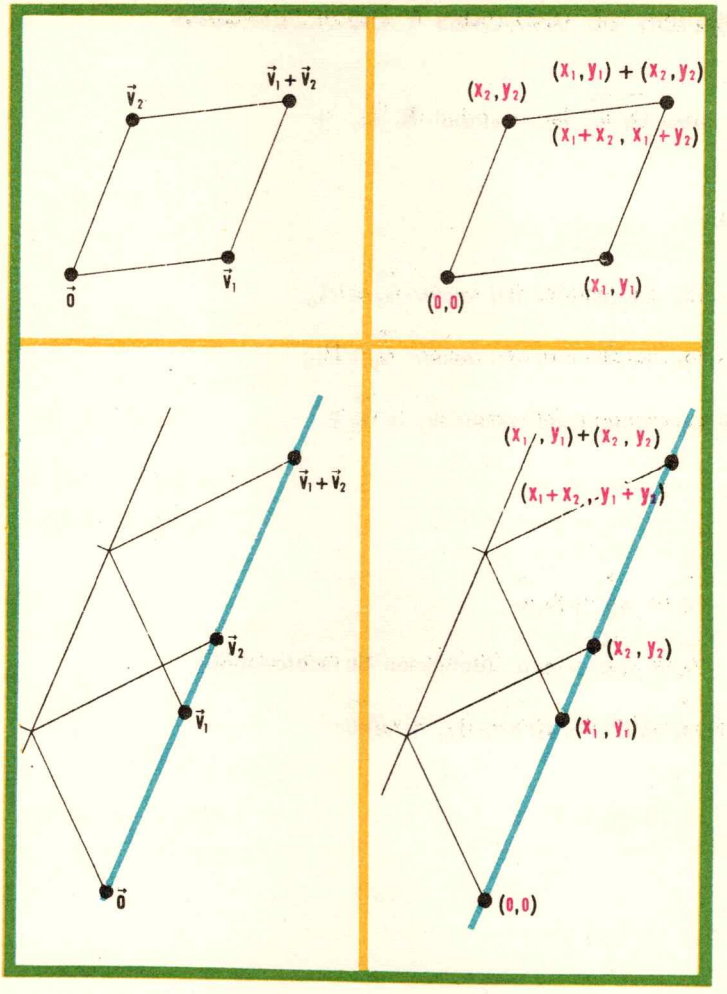
$$\vec{v}_1 = x_1\vec{e} + y_1\vec{u}$$

$$\vec{v}_2 = x_2\vec{e} + y_2\vec{u} \quad \text{(definición de coordenada)}$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{e} + (y_1 + y_2)\vec{u}$$

Luego

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ es la coordenada de $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$



ADICIÓN DE VECTORES = ADICIÓN DE COORDENADAS

FIG. 300

DEFINICIÓN

Si $(x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2$ y $(x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$

Entonces $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Gracias a esta definición, $\mathbf{R}^2$ está provisto de una ley de adición $\mathbf{R}^2, +$

PROPOSICIÓN 1

$\mathbf{R}^2, +$ *es un grupo conmutativo*

DEMOSTRACIÓN:

1 **Si** $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$, **Entonces** $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbf{R}^2$

2. *La adición de* $\mathbf{R}^2, +$ *es asociativa.* 3. *La adición de* $\mathbf{R}^2, +$ *es conmutativa.*

En efecto, he aquí $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbf{R}^2$

$$\begin{aligned}&((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)\\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)\\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\ &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)\\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)\end{aligned}$$

4. *La cupla* $(0,0)$ *es neutro para la adición de* $\mathbf{R}^2, +$

En efecto, para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y)$$

5. *Para todo* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^2$, *la cupla* $(-\mathbf{x}, -\mathbf{y})$ *el simétrico de* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

En efecto $(-x, -y) + (x, y) = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$

l.q.q.d.

Será muy natural anotar $-(x, y)$ la cupla $(-x, -y)$

La biyección del grupo $\mathbf{R}^2, +$ sobre el grupo $\Pi_0, +$

$$\mathbf{R}^2, + \;\rightarrow\; \Pi_0, + : (x, y) \;\rightarrow\; \vec{xe} + \vec{yu}$$

respeta la adición.

Luego **Si** $(0, e, u)$ es una referencia de Π

Entonces $\mathbf{R}^2, + \;\rightarrow\; \Pi_0, + : (x, y) \;\rightarrow\; \vec{xe} + \vec{yu}$

es un **ISOMORFISMO DE GRUPOS**

8 — MULTIPLICACIÓN ESCALAR Y COORDENADAS

Fijemos la base $(\vec{e}, \vec{u})$ del vectorial $R, \Pi_0, +$

Problema:

(x, y) es la coordenada del vector $\vec{v} \in \Pi_0$ y $r \in R$

¿Cuál es la coordenada del vector $\vec{rv}$?

Solución:

$$\vec{v} = x\vec{e} + y\vec{u} \qquad \text{(definición de coordenada)}$$

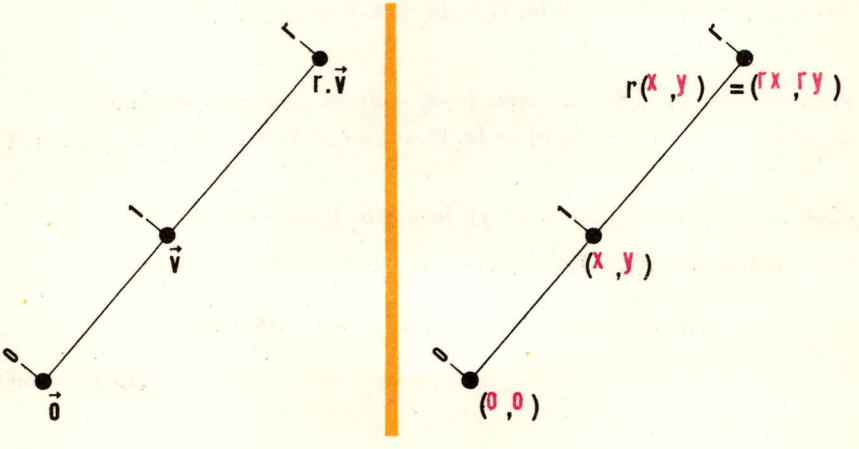
$$\vec{rv} = r(x\vec{e} + y\vec{u})$$

$$= r \cdot x\vec{e} + r \cdot y\vec{u}$$

$$= rx \cdot \vec{e} + ry \cdot \vec{u}$$

Luego

(rx, ry) es la coordenada de $\vec{rv}$



MULTIPLICACIÓN DE VECTORES POR EL REAL r = MULTIPLICACIÓN DE COORDENADAS POR EL REAL r

FIG. 301

Este resultado nos conduce muy naturalmente a proveer el grupo $R^2, +$ de una **multiplicación escalar.**

DEFINICIÓN

Si $(x, y) \in R^2$ y $r \in R$

Entonces $\boxed{r \cdot (x, y) = (rx, ry)}$

TEOREMA

R, R^2, + es un espacio vectorial

DEMOSTRACIÓN

1. $R^2, +$ es un grupo conmutativo (§ 6, prop. 1).
2. Para todo $r \in R$ y todo $(x, y) \in R^2$: $r \cdot (x, y) = (rx, ry) \in R^2$
3. *La multiplicación escalar es asociativa.*

   En efecto, he aquí $a, b \in R$ y $(x, y) \in R^2$

   $$\begin{aligned} & a \cdot b\,(x, y) \\ = {} & a \cdot (bx, by) \\ = {} & (a \cdot bx, a \cdot by) \\ = {} & (ab \cdot x, ab \cdot y) \\ = {} & ab \cdot (x, y) \end{aligned}$$

4. *La multiplicación escalar distribuye la adición de reales.*

   En efecto, he aquí $a, b \in R$ y $(x, y) \in R^2$

   $$\begin{aligned} & (a + b) \cdot (x, y) \\ = {} & ((a + b)\,x, (a + b)\,y) \\ = {} & (ax + bx, ay + by) \\ = {} & (ax, ay) + (bx, by) \\ = {} & a \cdot (x, y) + b \cdot (x, y) \end{aligned}$$

5. *La multiplicación escalar distribuye la adición de vectores.*

   En efecto, he aquí $a \in R$ y $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$

   $$\begin{aligned} & a \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ = {} & a \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ = {} & (a\,(x_1 + x_2), a\,(y_1 + y_2)) \\ = {} & (ax_1 + ax_2, ay_1 + ay_2) \\ = {} & (ax_1, ay_1) + (ax_2, ay_2) \\ = {} & a\,(x_1, y_1) + a\,(x_2, y_2) \end{aligned}$$

6. *La multiplicación escalar admite* $1 \in R$ *como neutro.*

En efecto, he aquí $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

$1 \cdot (x, y) = (1.x \ , \ 1.y) = (x, y)$ l.q.q.d.

Recapitulemos.

La biyección $\mathbf{R}^2 \rightarrow \Pi_0 : (x, y) \rightarrow \vec{xe} + \vec{yu}$

1) es un isomorfismo de grupos $\mathbf{R}^2, + \rightarrow \Pi_0, +$

2) respeta la multiplicación escalar para todo real r

(puesto que $\mathbf{R}^2 \rightarrow \Pi_0 : r.(x, y) \rightarrow r.(\vec{xe} + \vec{yu})$)

Estas dos propiedades se expresan brevemente en el

TEOREMA

Si $(0, e, u)$ es una referencia de Π,

Entonces la biyección $\mathbf{R}^2 \rightarrow \Pi_0 : (x, y) \rightarrow \vec{xe} + \vec{yu}$

es un **ISOMORFISMO DE VECTORIALES**

$\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \rightarrow \mathbf{R}, \Pi_0, +$

EJERCICIOS

La referencia (o, e, u) de Π está fijada

1. **Si** (x, y) es la coordenada de p

   Entonces ¿cuál es la coordenada de $s_0(p)$
   (donde s_0 designa la simetría de centro o)?

2. Llamemos X a la recta oe e Y a la recta ou.
   Llamemos s_1 a la simetría de eje X, paralela a Y

   Llamemos s_2 a la simetría de eje Y, paralela a X

   Si (x, y) es la coordenada de p

   Entonces ¿cuáles son las coordenadas de $s_1(p)$ y $s_2(p)$?
   ¿cuál es la coordenada de $(s_1 \circ s_2)(p) = s_1(s_2(p))$?
   ¿cuál es la coordenada de $(s_2 \circ s_1)(p)$?

3. Las mismas anotaciones que en los ejercicios 1 y 2.

   Establece que $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 = s_0$

4. Las mismas anotaciones.
   Escribe la tabla de composición:

$\circ$	I_π	s_1	s_2	s_0
I_π				
s_1				
s_2				
s_0				

5. Las mismas anotaciones.

   $\{I_\pi, s_0, s_1, s_2\}, \circ$ no es uno de nuestros viejos amigos?

6. Las mismas anotaciones.

   $\{I_\pi, s_0, s_1, s_2\}, \circ$ es isomorfo a $\mathcal{P}\{e, u\}, \Delta$
   y no es isomorfo a $\mathbf{Z}_4, +$

7. Si (x_1, y_1) es la coordenada de $\vec{v}_1 \in \Pi_0$
(x_2, y_2) es la coordenada de $\vec{v}_2 \in \Pi_0$
$r_1, r_2 \in R$

Entonces ¿cuál es la coordenada de $r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2$?

8. Si o, p_1, $p_2 \in \Pi$,
Entonces $\overrightarrow{op_1} + \overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{op_2}$ y $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{op_2} - \overrightarrow{op_1}$

9. No olvides nunca que
Si (x, y) es la coordenada de $p \in \Pi$,
Entonces (x, y) es la coordenada de $\vec{p} = \vec{op}$
y $\vec{op} = x\vec{e} + y\vec{u}$

10. Si (x_1, y_1) es la coordenada de $p_1 \in \Pi$
(x_2, y_2) es la coordenada de $p_2 \in \Pi$,
Entonces ¿cuál es la coordenada de $\overrightarrow{p_1p_2}$?

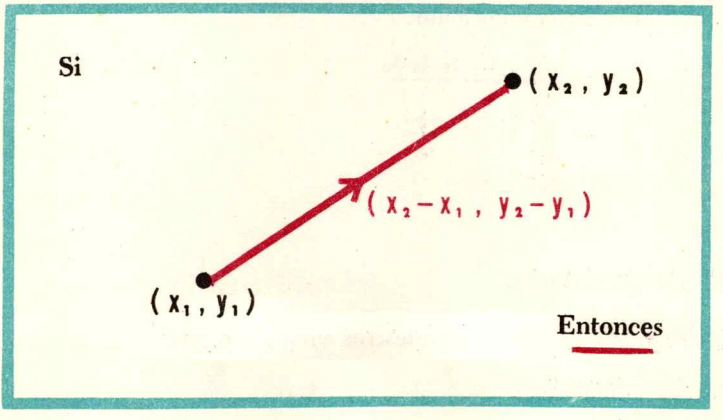


FIG. 302

11. Completa.

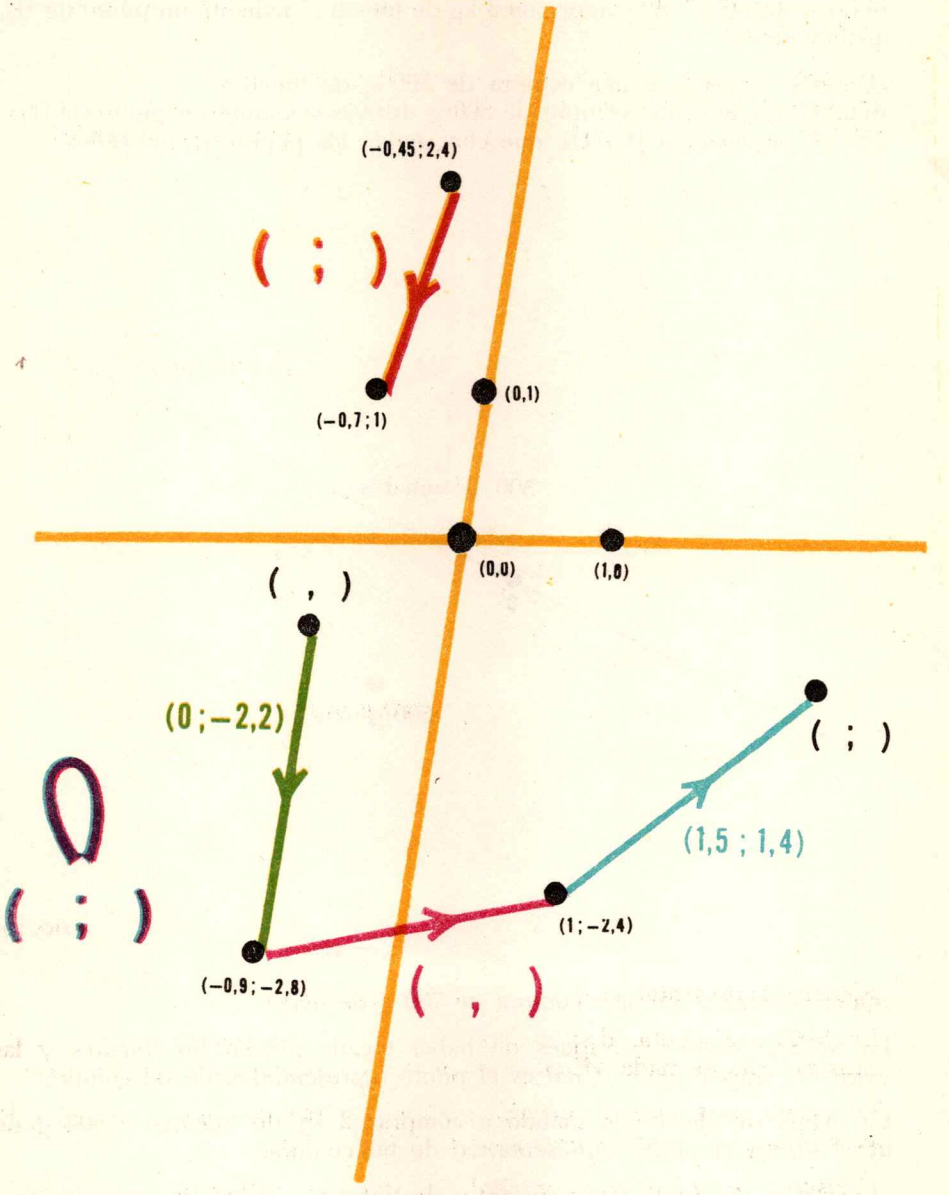


FIG. 303

12. En este puesto frutero del borde de la ruta, no se vende más que una clase de tomates y una clase de uvas.

Representaremos una compra de 3 kg de tomates mediante un punto de Π_0, distinto de 0.

¿Quieres representar una compra de 500 g de tomates?
Representaremos una compra de 500 g de uvas mediante un punto de Π_0 que no pertenece a la recta que comprende los puntos ya marcados.

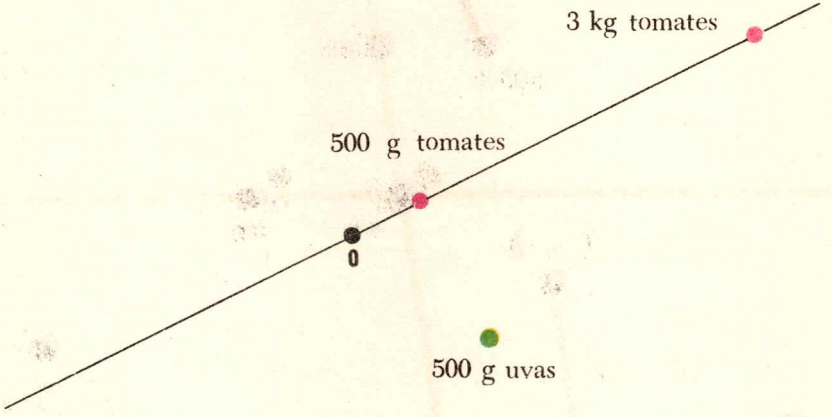


FIG. 304

¿Quieres representar una compra de 750 g de uvas?

La Señora Sisebuta, después de haber tocado mucho los tomates y las uvas no compra nada. ¿Cuál es el punto representativo de tal compra?

La mamá de Luisito lo mandó a comprar 2 kg de tomates y 500 g de uvas. Marca el punto representativo de tal compra.

Luisito se equivocó. Compró 500 g de tomates y 2 kg de uvas. ¿Quieres representar la compra efectivamente realizada?

Su mamá lo envía nuevamente.

Para corregir su primera compra, esta vez pide 1,5 kg de tomates — 1,5 kg de uvas.
Marca esta nueva compra. Verifica.

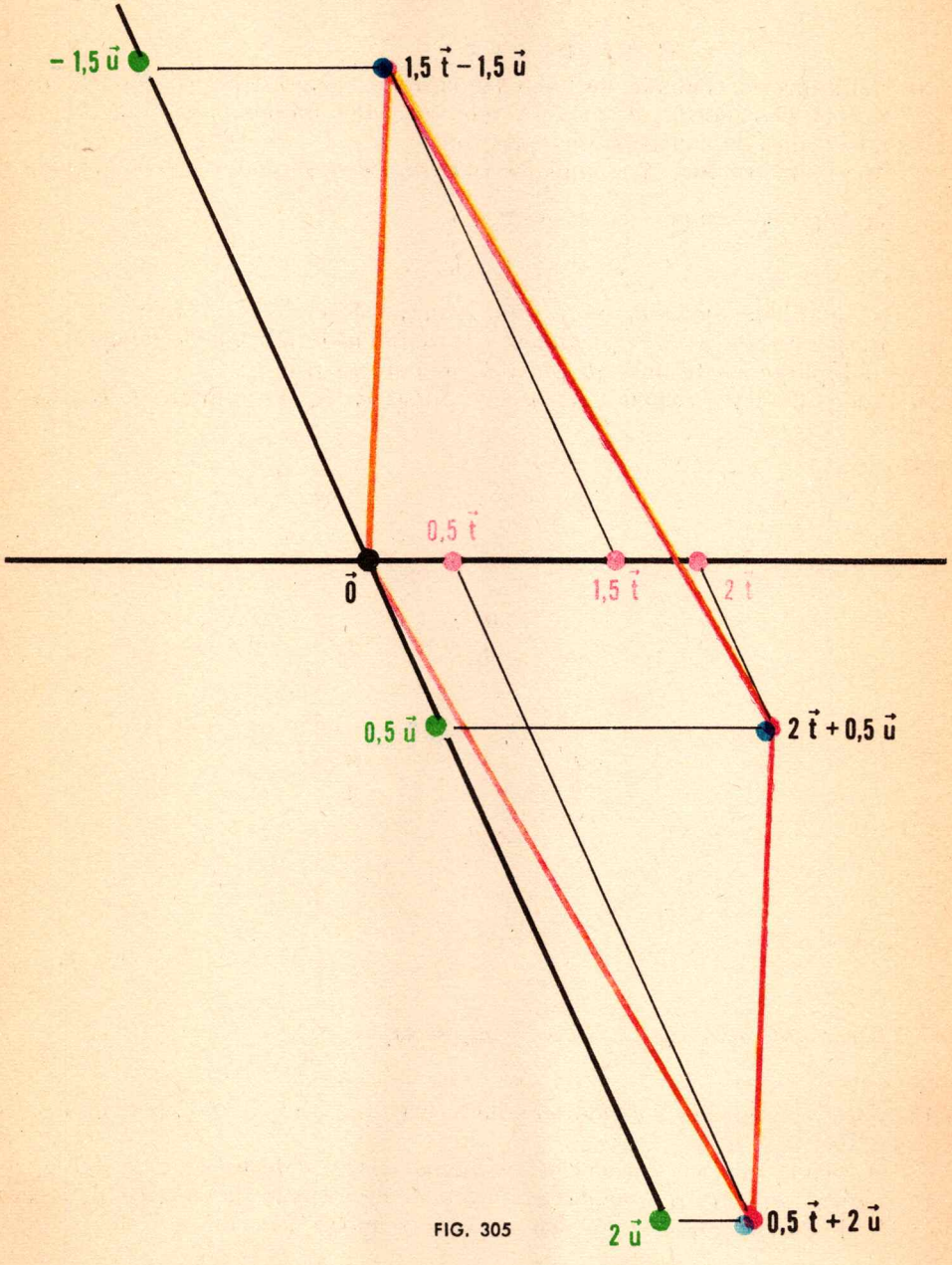


FIG. 305

13. Consideremos nuevamente la situación del ejercicio 12.

Pongamos $\vec{e}$ = 3 kg de tomates

$\vec{u}$ = 500 gr de uvas

$A = \{x\vec{e} + y\vec{u} \mid x, y \in \mathbf{R}\}$

A idealiza el conjunto de todas las posibles compras que se pueden realizar en el negocito al que nos referimos, del mismo modo que un plano idealiza la superficie del pizarrón.

Más aún, consideremos aquí las compras $x\vec{e} + y\vec{u}$ con x o y negativo.

He aquí las compras $\vec{a}_1 = x_1\vec{e} + y_1\vec{u}$

$\vec{a}_2 = x_2\vec{e} + y_2\vec{u}$

¿A qué llamaremos $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ y $r\vec{a}_1$ (con $r \in \mathbf{R}$)?

Respondiendo a estas preguntas, has definido la adición de compras y la multiplicación de una compra por un número real.

Estas dos leyes erigen a A en el vectorial **R**, A, + isomorfo a **R**, Π_0, +

14. En A

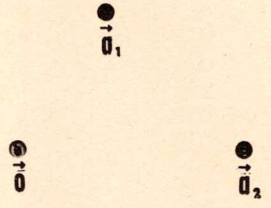


FIG. 306

Construye $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$, $2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$

15. En este negocio, el dueño no admite más que compras positivas de azúcar y bananas.

Sabiendo que sus existencias comprenden 45 kg de bananas y 463 kg de azúcar, ¿quieres representar gráficamente el conjunto de compras de azúcar y de bananas que se pueden realizar en dicho negocio?

16. Se te informa que en este negocio 1,5 kg de bananas cuestan 1.50 $ y 4,5 kg de azúcar, 3,10 $.
Designemos 1 kg de bananas con $\vec{b}$ y 1 kg de azúcar con $\vec{s}$.
Además designamos con $p(\vec{a})$ el precio de la compra $\vec{a}$.
La información que se te ha dado, se escribe, pues

$$p(1{,}5\vec{b}) = 1.50$$
$$p(4{,}5\vec{s}) = 3.10$$

Ahora puedes calcular el costo de toda compra de bananas y de azúcar efectuada en este negocio.
¿Quieres calcular, por ejemplo,

$$p(2\vec{b} + 6\vec{s})$$
$$p(-4\vec{b} + 5\vec{s})$$
$$p\left(\frac{3}{8}\vec{b} - \frac{2}{7}\vec{s}\right)$$
$$p\left(\frac{11}{4}\vec{b} + 5{,}8\,\vec{s}\right)$$

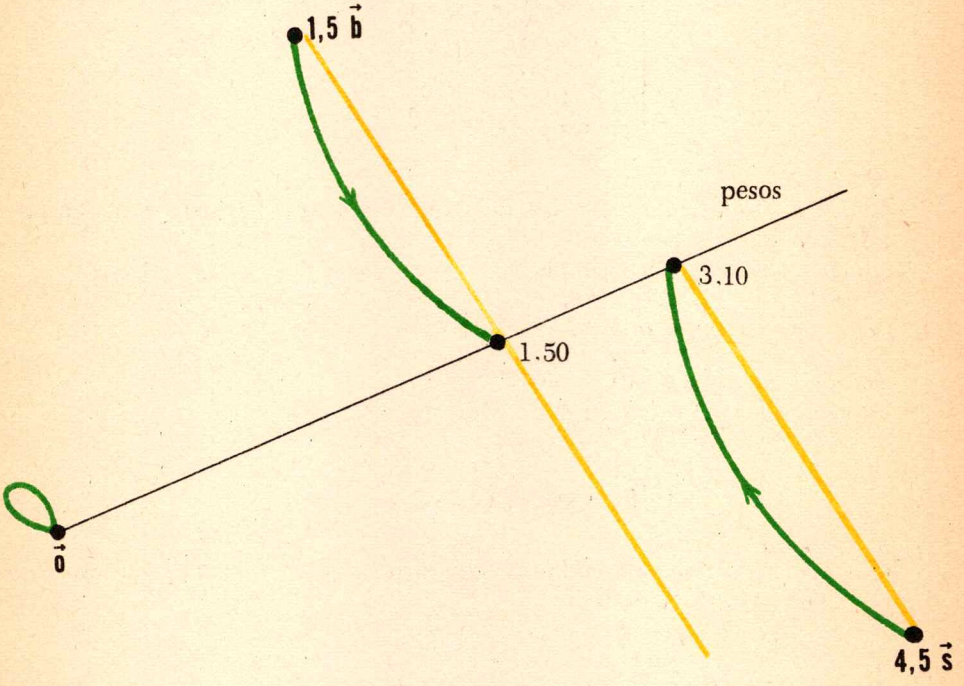
Si $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ designan compras (de azúcar y de bananas en este negocio) y $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$

Entonces $p(r_1\vec{a_1} + r_2\vec{a_2}) = r_1 p(\vec{a_1}) + r_2 p(\vec{a_2})$

(según las costumbres del negocio)

En particular, si $x, y \in \mathbf{R}$, **entonces** $p(x\vec{b} + y\vec{s}) = x.p(\vec{b}) + y.p(\vec{s})$.
Como ya sabes, este hecho se expresa diciendo que la función precio es lineal.

He aquí un dibujo que traduce la información que recuadramos



COMPRAS Y PRECIOS

FIG. 307

¿Cómo hicimos este dibujo?

Indica un orden posible de la construcción.

Gracias a la disposición astuta de la fig. 307, los precios de $1{,}5\,\vec{b}$ y $4{,}5\,\vec{s}$ se obtienen mediante la proyección verde.

Pero sabemos que la proyección verde es lineal. Ella representa, pues, perfectamente la función precio.

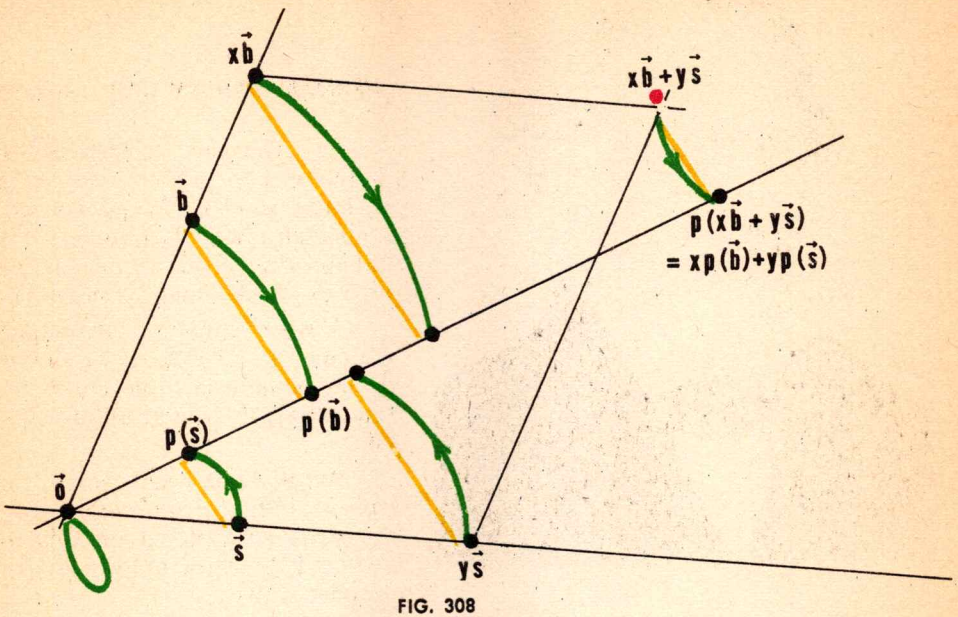
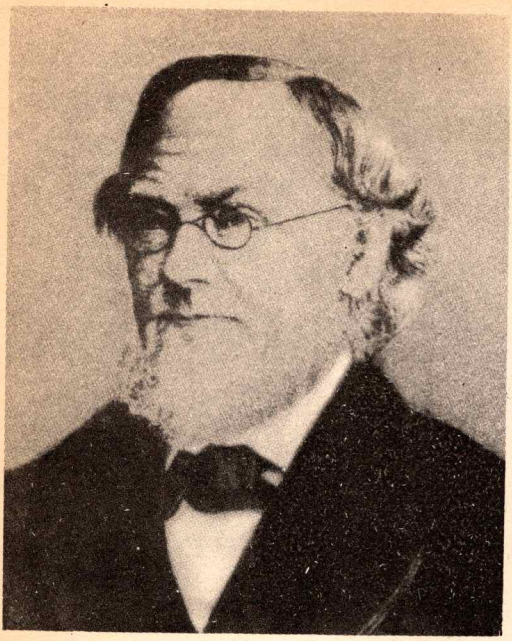


FIG. 308

COMPRAS, PRECIOS Y PROYECCIÓN

17. ¿Quieres indicar, en la fig. 307, el conjunto de compras de bananas y de azúcar que se pueden realizar gastando exactamente 4.— $?
¿Cuál es el conjunto de "compras" que se pueden efectuar sin dinero?
Estas compras son trueques "bananas-azúcar".
Entro en el negocio con 4.— $.
Salgo con bananas, azúcar y dinero.
¿Cuál es el conjunto de puntos que representan la compra que pude haber efectuado?



HERNAN GRASSMANN (1809-1877)

Los espacios vectoriales fueron definidos por primera vez en 1888, en forma similar a la que conoces actualmente, por el gran matemático italiano Peano, que es uno de los padres de la matemática moderna.

Viste el papel que desempeña el teorema de Thales en la definición de las homotecias, que nos permitieron introducir la multiplicación escalar.

Así te darás cuenta que es imposible atribuir el descubrimiento de los espacios vectoriales a un solo matemático. Esta estructura fue apareciendo poco a poco.

El matemático alemán Gauss ya había utilizado, de manera implícita, la noción de vectorial plano, y sobre todo la adición de vectores.

Sin embargo es justo considerar al matemático alemán Hermann Grassmann, nacido en Stettin en 1809, como el fundador de la teoría. Se le debe la primera definición explícita de la adición de vectores, y numerosos teoremas que continúan siendo fundamentales. Actualmente se reconoce la importancia de las teorías que él creó a partir de los espacios vectoriales.

Los trabajos de Grassmann inspiraron a Peano, que fue uno de los primeros en rendir homenaje a sus méritos.

Grassmann trabajó casi toda su vida en una triste soledad moral, sin llegar a ver sus ideas matemáticas adoptadas por sus contemporáneos.

Este espíritu original, de avanzada en su época, se interesó por temas tan variados como las corrientes eléctricas, los colores, la acústica, la lingüística, la botánica, el folklore, la matemática.

En vida no fue consagrado como matemático, pero lo fue como filólogo. Su diccionario de sánscrito aún se utiliza.

Pese a sus reiterados pedidos, Grassmann nunca fue nombrado profesor en la Universidad, porque se temía que su espíritu original lo condujera a una enseñanza unilateral, en la cual hiciera la propaganda de sus propias ideas.

Durante casi toda su vida fue profesor de ciencias en escuelas secundarias, pero el puesto de profesor de matemática en el Liceo de Stettin, vacante por la muerte de su propio padre, le fue negado.

La Academia de Sajonia le rindió homenaje póstumo, publicando sus obras completas.

16

Ecuaciones de las rectas del plano

Se ha fijado la referencia (o, e, u) del plano Π

1 — RECTAS QUE COMPRENDEN EL ORIGEN o

a) He aquí $(m, n) \in \mathbf{R}^2$ tales que $m \neq 0 \neq n$

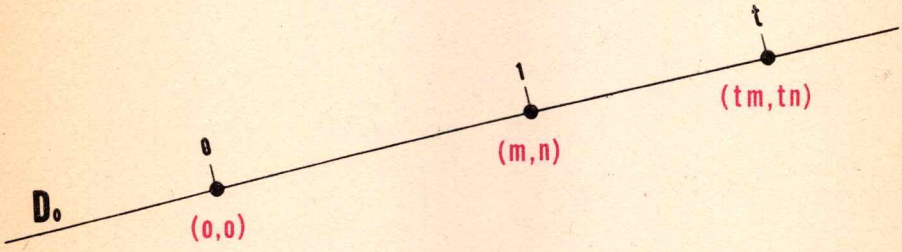


FIG. 309

$$D_0 = \{ \quad (tm, tn) \quad | \quad t \in \mathbf{R} \}$$

$$D_0 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad x = tm, y = tn \quad y \quad t \in \mathbf{R} \}$$

$$D_0 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad \frac{x}{m} = t = \frac{y}{n} \quad y \quad t \in \mathbf{R} \}$$

$$D_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} \right\}$$

$$D_0 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad nx - my = 0 \}$$

$$D_0 \equiv nx - my = 0$$

b) He aquí $(m, n) \in \mathbf{R}^2$ con $m = 0 \neq n$

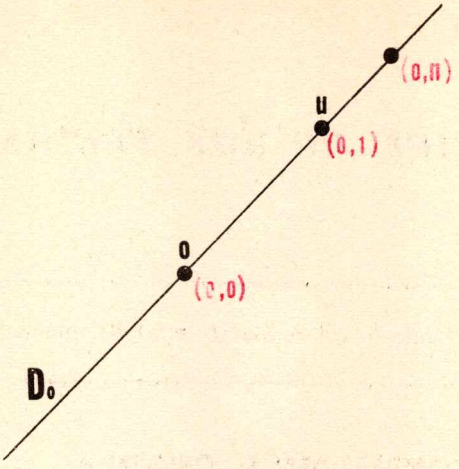


FIG. 310

$$D_0 \equiv x = 0$$

Como $n \neq 0$, $x = 0 \iff nx = 0$

Luego $D_0 \equiv nx = 0$

o aún, puesto que $m = 0$

$$D_0 \equiv nx - my = 0$$

c) He aquí $(m, n) \in \mathbf{R}^2$ con $m \neq 0 = n$

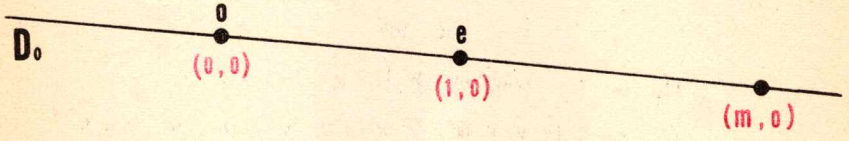


FIG. 311

$$D_0 \equiv y = 0$$

$$D_0 \equiv -my = 0$$

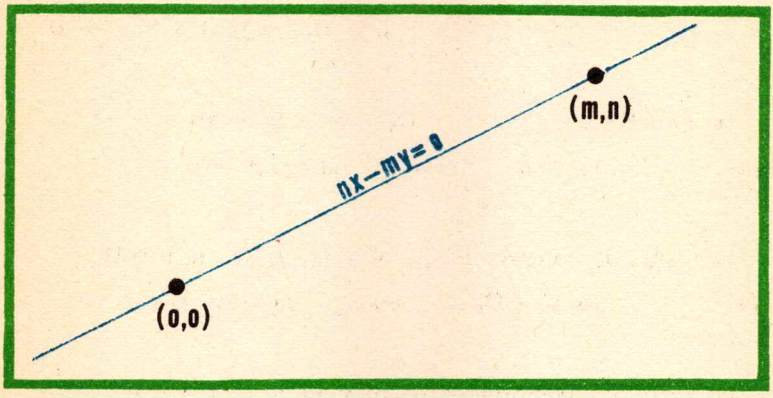
$$D_0 \equiv nx - my = 0$$

d) Recapitulemos

Si $(m, n) \in \mathbf{R}^2$ y $(m, n) \neq (0, 0)$

Entonces $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid nx - my = 0 \}$

es la recta que comprende (0, 0) y (m, n)



ECUACIÓN DE UNA RECTA QUE COMPRENDE EL ORIGEN

FIG. 312

EJERCICIOS

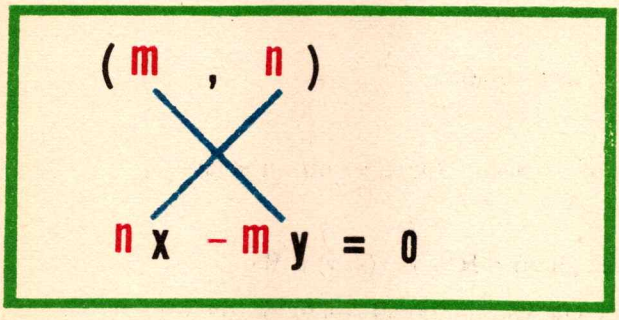


FIG. 313

1. Escribe la ecuación que define la recta que comprende el origen y

a.	(2 ; 3)	d.	(−12,5 ; 3)	g.	(5 ; 0)
b.	(3 ; 2)	e.	(−12 ; −11)	h.	$\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$
c.	(5 ; −7)	f.	(0 ; 5)	k.	$\left(\frac{7}{2}; -\frac{9}{7}\right)$

2. Traza cada una de las rectas siguientes:

a. $7x - 3y = 0$

b. $8y - 2x = 0$

c. $2x + 2y = 0$

d. $x - 3y = 0$

e. $7x = 15y$

f. $2x - 3y = 17y$

g. $7x = 4x$

h. $3y - 2x = 7x - 8y$

k. $2x + 2 = 3y + 2$

l. $-2x - 3y + 7 = 7 - 4x + y$

3. Si $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ y $D_0 \equiv 2x - 3y = 0$

Entonces $(u, v) \in D_0 \iff 2u - 3v = 0$

4. Si la recta D_0 comprende $(0, 0)$ y $(2, 7)$ y $u, v \in \mathbf{R}$

Entonces $(u, v) \in D_0 \iff 7u - 2v = 0$

5. Si la recta D_0 comprende $(0, 0)$ y $(2, 7)$ y $x, y \in \mathbf{R}$

Entonces $(x - 2, y - 5) \in D_0 \iff 7(x - 2) - 2(y - 5) = 0$

6. Si la recta D_0 comprende $(0, 0)$ y $(5, 4)$ y $x, y \in \mathbf{R}$

Entonces $(x - 3, y - 1) \in D_0 \iff \ldots$

7. $(0, 5) \neq (0, 0) \neq (-7, 0)$

8. $(m, n) \neq (0, 0) \iff (m \neq 0$ **ou** $n \neq 0)$

9. Si $(0, 0) \neq (m, n) \in \mathbf{R}^2$ y $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

la recta D_0 comprende $(0, 0)$ y (m, n)

Entonces $(x - 5, y - 3) \in D_0 \iff \ldots$

10. Si $(0, 0) \neq (m, n) \in \mathbf{R}^2$; $(p, q), (x, y) \in \mathbf{R}^2$

la recta D_0 comprende $(0,0)$ y (m, n)

Entonces $(x - p, y - q) \in D_0 \iff n(x - p) - m(y - q) = 0$

2 — ECUACIONES DE LAS RECTAS DEL PLANO

He aquí una recta D que no comprende el origen.
Llamemos D_0 a la paralela a D que comprende o
Llamemos (p, q) a un punto de D

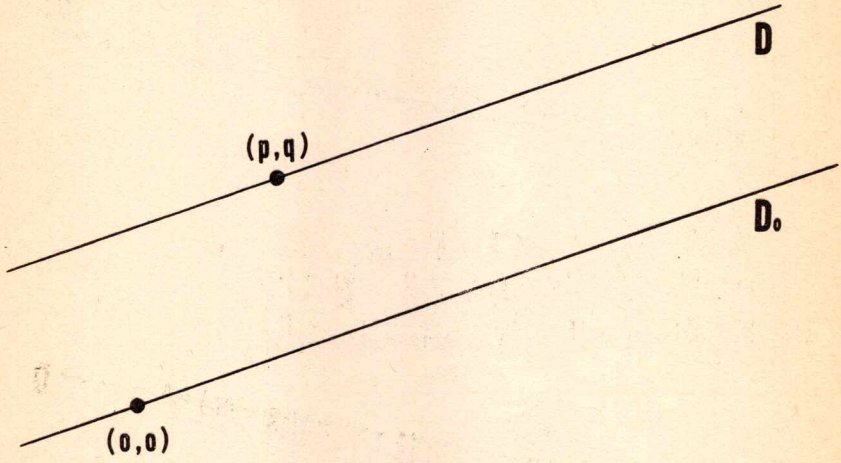


FIG. 314

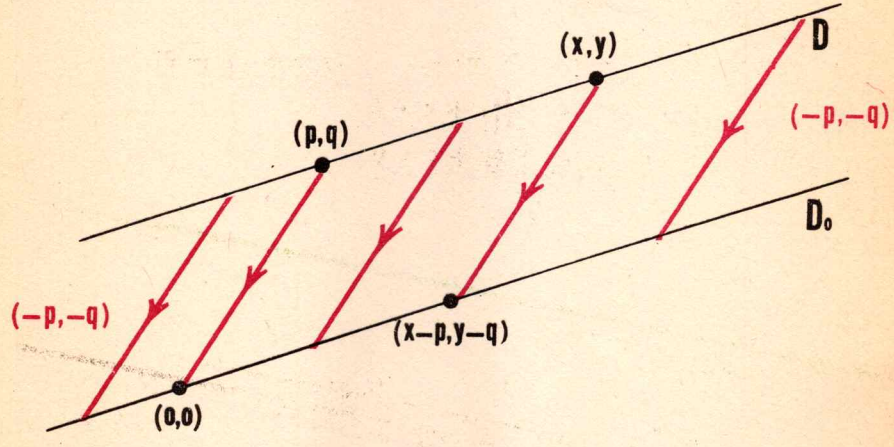


FIG. 315

$$(x, y) \in D \iff (x - p, y - q) \in D_0$$

Llamemos (m, n) a un punto de D_0, distinto de $(0,0)$

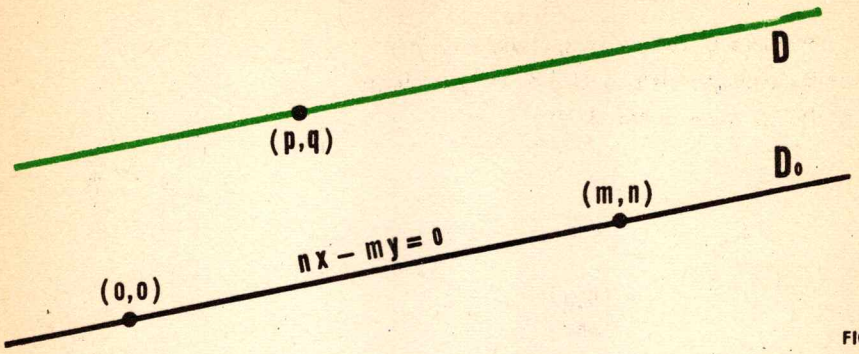


FIG. 316

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - p, y - q) \in D_0 \}$$
$$= \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid n(x - p) - m(y - q) = 0 \}$$
$$= \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid nx - my + (mq - np) = 0 \}$$

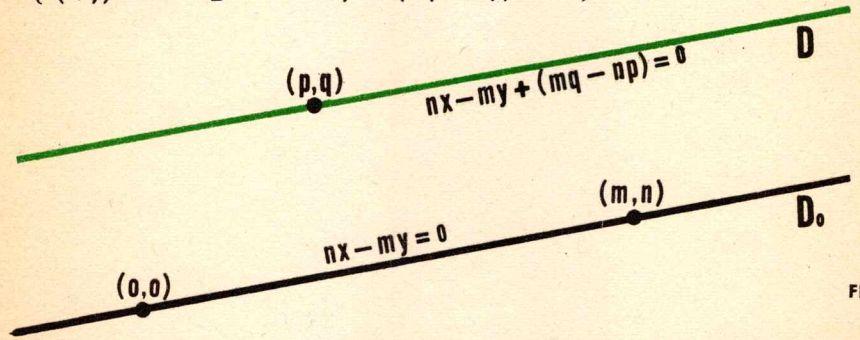


FIG. 317

Pongamos $a = n$, $b = -m$, $c = mq - np$ (luego a o $b \neq 0$)

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c = 0 \}$$
$$D \equiv ax + by + c = 0$$

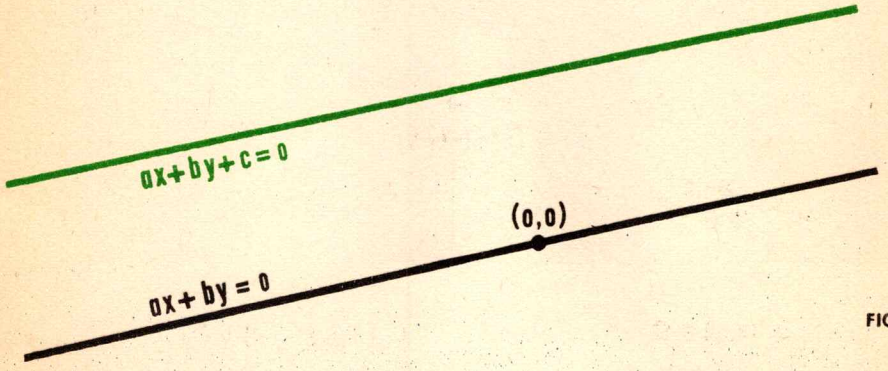


FIG. 318

Teniendo en cuenta el parágrafo 1, podemos enunciar la

PROPOSICIÓN

Para toda recta D, existen reales a, b, c *tales que*

$$D \equiv ax + by + c = 0$$

La recta D_0 *que comprende (0,0) y es paralela a D está definida por*

$$D_0 \equiv ax + by = 0$$

Observemos que ya habíamos obtenido un resultado más preciso.

Si $(p, q) \in D \in \mathfrak{D}$ y $(0, 0) \neq (m, n) \in D_0$ (paralela a D, que comprende o)
Entonces $D \equiv n(x - p) - m(y - q) = 0$

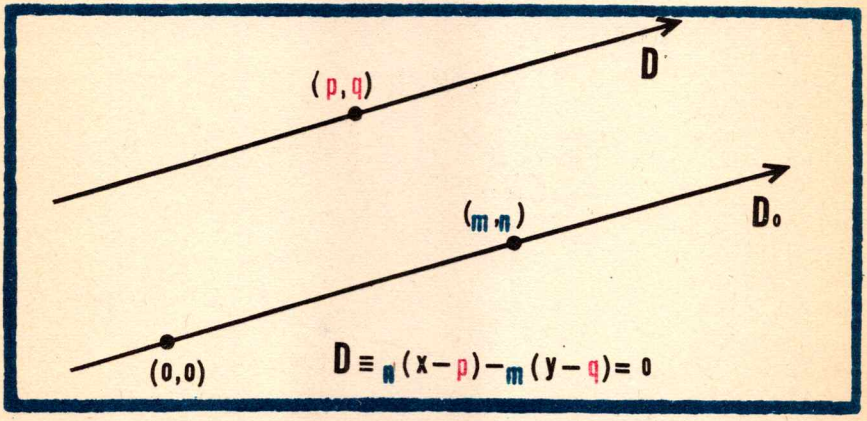


FIG. 319

EJERCICIOS

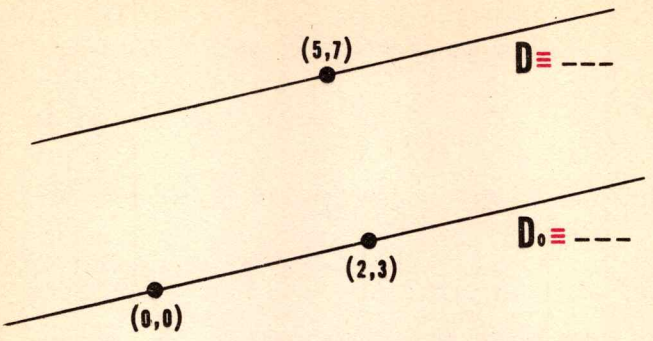


FIG. 320

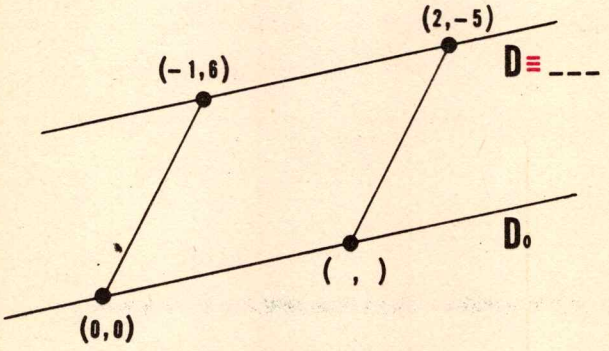
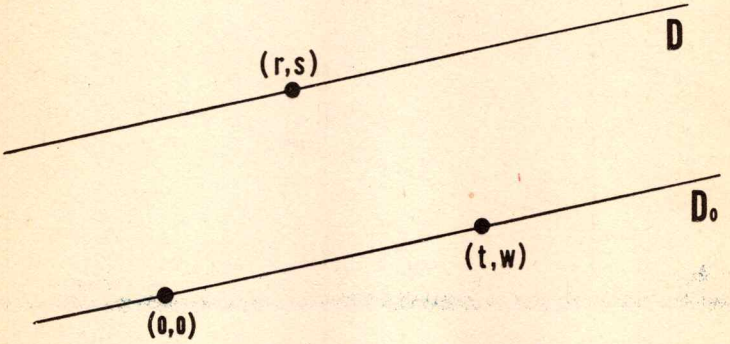
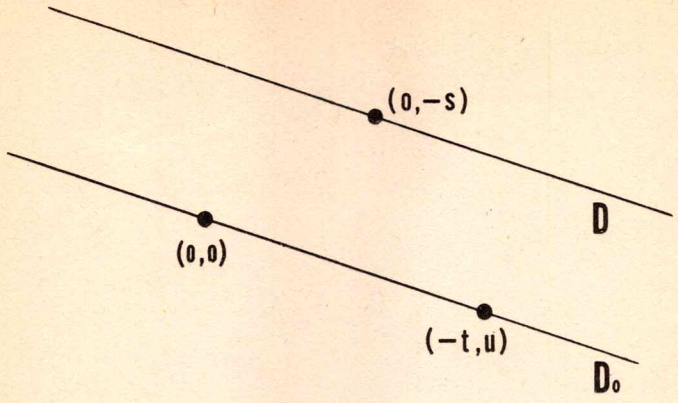


FIG. 321



$$D \equiv w(x - r) - t(y - s) = 0$$

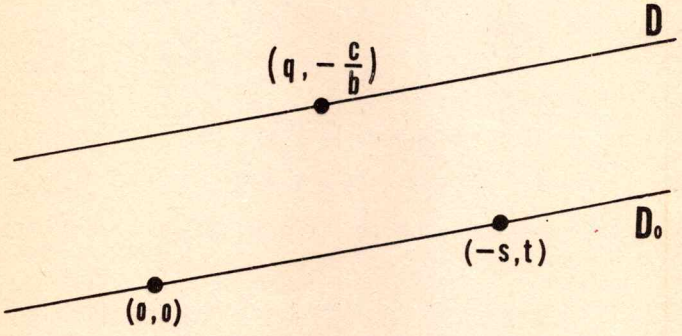
FIG. 322



D ≡ ...

FIG. 323

5.



D ≡ ...

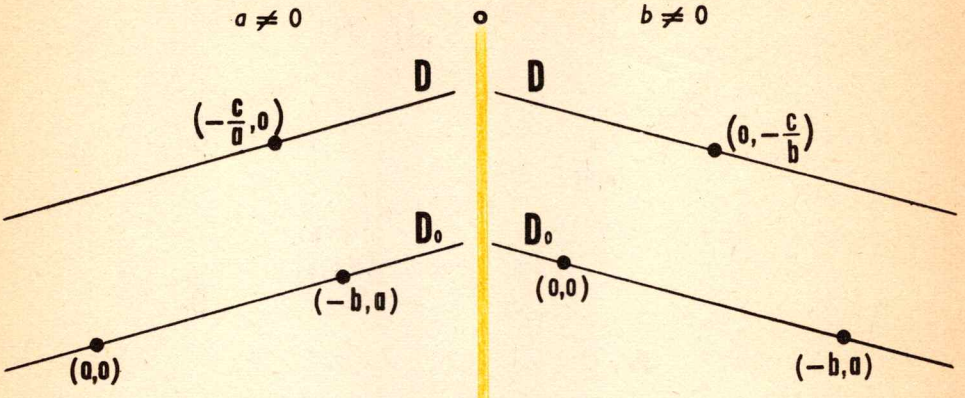
FIG. 324

6. La recta $ax + bx + c = 0$ comprende $(0, 0)$ ssi $c = 0$

7. La recta $ax + by + c = 0$ comprende $(1, 1)$ ssi $a + b + c = 0$

3 — TODA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO DEFINE UNA RECTA

He aquí los reales a, b, c tales que



$D \equiv a\left(x + \frac{c}{a}\right) + b(y - 0) = 0$ $\quad$ $D \equiv a(x - 0) + b\left(y + \frac{c}{b}\right) = 0$

$D \equiv ax + c + by = 0$ $\quad$ $D \equiv ax + by + c = 0$

$D \equiv ax + by + c = 0$

FIG. 325

Acabamos de probar que

Si $\quad a, b, c \in \mathbf{R}$ y $(a \neq 0$ ou $b \neq 0)$

Entonces $\quad \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c = 0 \}$ $\quad$ es una recta

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el parágrafo anterior, podemos enunciar el

TEOREMA

D es una recta $\iff$ existen $a, b, c \in \mathbf{R}$ (con $a \in \mathbf{R}_0$ o $b \in \mathbf{R}_0$) tales que $D \equiv ax + by + c = 0$

La paralela a D que comprende (0,0) está entonces definida por $D_0 \equiv ax + by = 0$

De la última parte del teorema resulta:

Modificando el término constante de la ecuación $ax + by + c = 0$ *de la recta D se obtiene la ecuación de una paralela a D*

4 — RECTA QUE COMPRENDE DOS PUNTOS DADOS

Problema:

He aquí dos puntos distintos $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$

Encuentra una ecuación de la recta que comprenda estos dos puntos.

Solución:

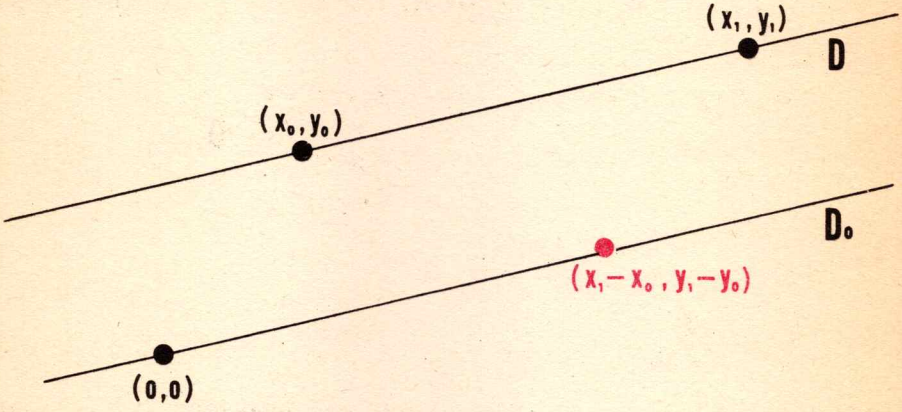


FIG. 326

Falta aplicar el método indicado al fin de § 2.

$$D \equiv (y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0$$

EJERCICIOS

1. Escribe una ecuación de la recta que comprende (2, 3) y (1, —6)

$$(2, 3) - (1, -6) = (\ , 9\ )$$

$$9(x - 2) - 1(y - 3) = 0$$

$$9x - y - 15 = 0$$

¡Explica!

2. Escribe una ecuación de la recta que comprende los puntos

(5, 2)	y	(3, 4)		(7, —6)	y (—1, 1)
(5, 2)	y	(5, 4)		(0, 2)	y (0, 3)
(5, 2)	y	(3, 2)		(2, 0)	y (0, 3)

5 — TRAZAR LA RECTA $D \equiv ax + by + c = 0$

$(\text{con } a, b, c \in \mathbf{R} \text{ y } (a \neq 0 \text{ o } b \neq 0))$

Sólo hay que recordar una cosa: ***D es una recta.***

Para trazarla basta determinar **dos** de sus puntos, es decir, cuplas

$$(x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2 \qquad (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2 \qquad (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$$

tales que

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad \text{y} \quad ax_2 + by_2 + c = 0 \qquad (1)$$

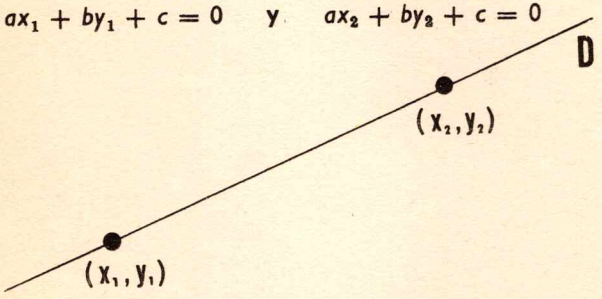


FIG. 327

Para encontrar las cuplas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que satisfagan a (1), te las arreglas como quieras . . . tratando de sacar partido de las ventajas de la situación particular que se te ofrece.

Así . . .

Si $c = 0$

Entonces $(0, 0) \in D \equiv ax + by = 0$ . . . puesto que $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$

$(-b, a) \in D \equiv ax + by = 0$ . . . puesto que $a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$

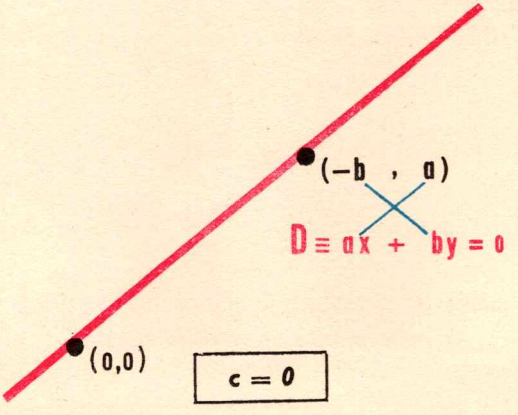


FIG. 328

5. TRAZAR LA RECTA (CON Y D $\equiv ax + by + c = o$

Si $a = 0$ (y por lo tanto $b \neq 0$)

Entonces $D \equiv by + c = 0$

$D \equiv y = -\frac{c}{b}$

$D \equiv \left\{ \left(x, -\frac{c}{b}\right) \mid x \in \mathbf{R} \right\}$ y $D \parallel X$

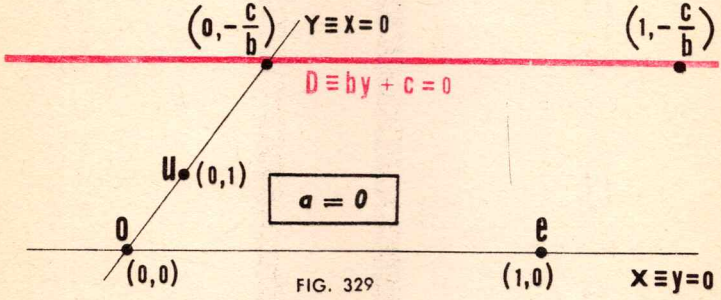


FIG. 329

Si $b = 0$ I (y por lo tanto $a \neq 0$)

Entonces $D \equiv ax + c = 0$

$D \equiv x = -\frac{c}{a}$

$D = \left\{ \left(-\frac{c}{a}, y\right) \mid y \in \mathbf{R} \right\}$ y $D \parallel Y$

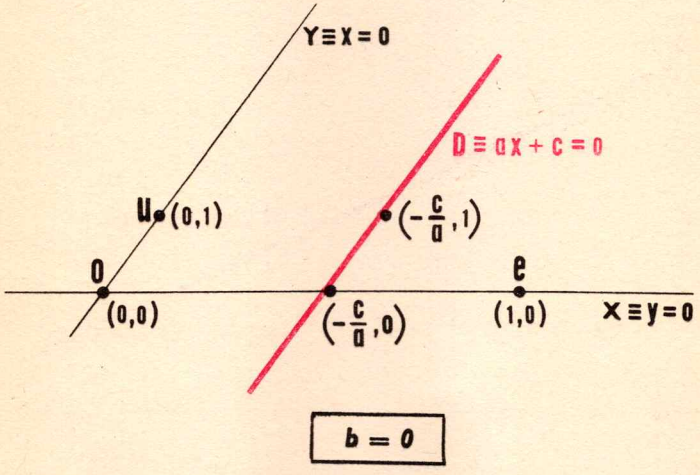


FIG. 330

Si ninguno de los reales a, b, c es nulo

Entonces se buscan las cuplas $(0, y) \in D$ y $(x, 0) \in D$

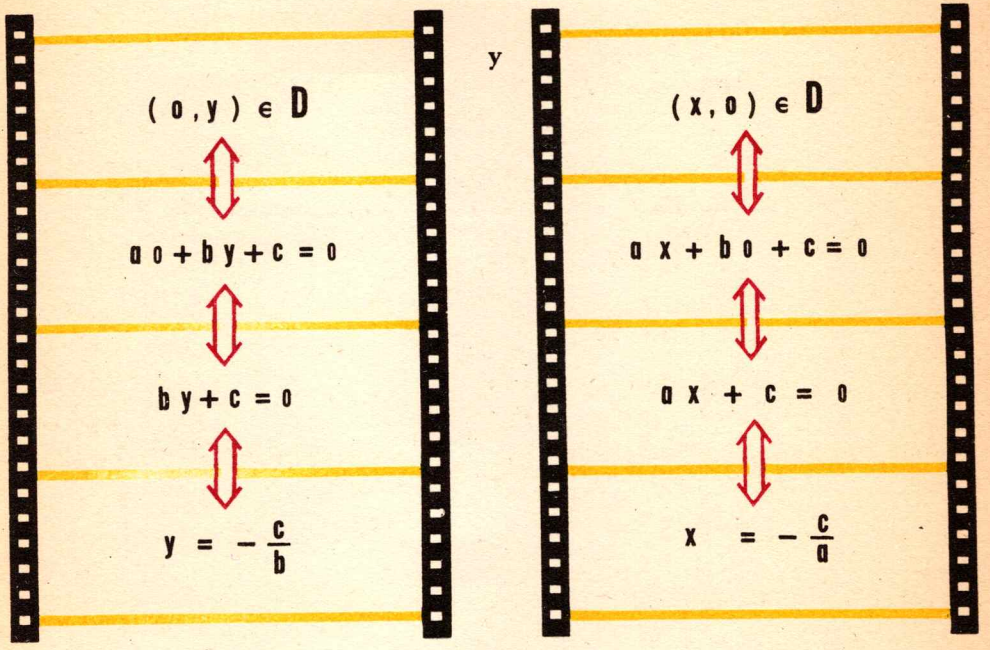
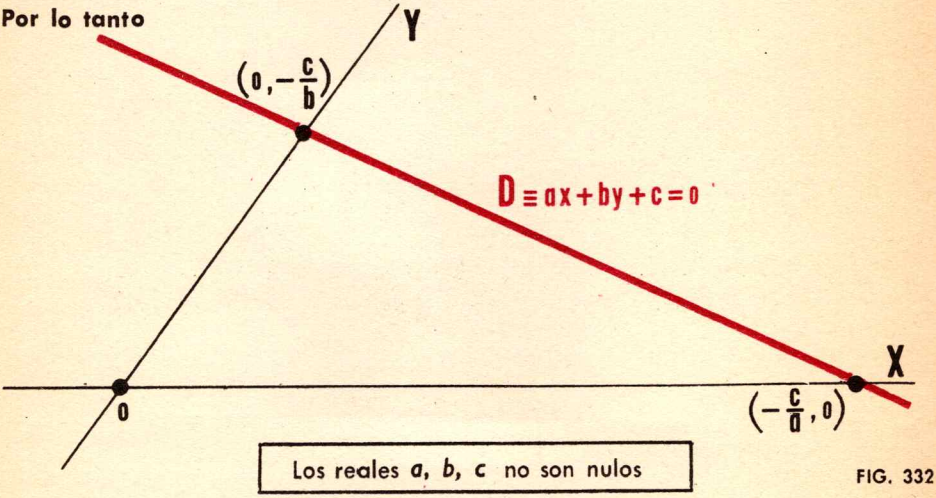


FIG. 331

Así $\left(0, -\frac{c}{b}\right) \in D$ y $\left(-\frac{c}{a}, 0\right) \in D$

Por lo tanto



Los reales a, b, c no son nulos

FIG. 332

6 — EJERCICIOS

1. Traza las rectas

$D_1 \equiv x = 0$
$D_2 \equiv y = 0$
$D_3 \equiv x + y = 0$
$D_4 \equiv y = 2x$
$D_5 \equiv y = 2x + 3$
$D_6 \equiv x + y - 2 = 0$
$D_7 \equiv y = 2x + 6$

2.

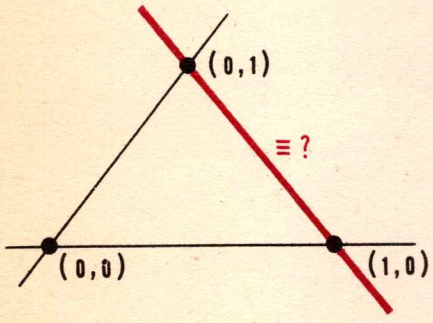


FIG. 333

3.

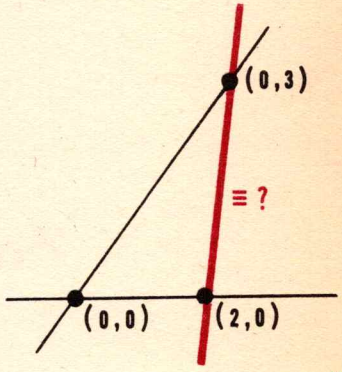
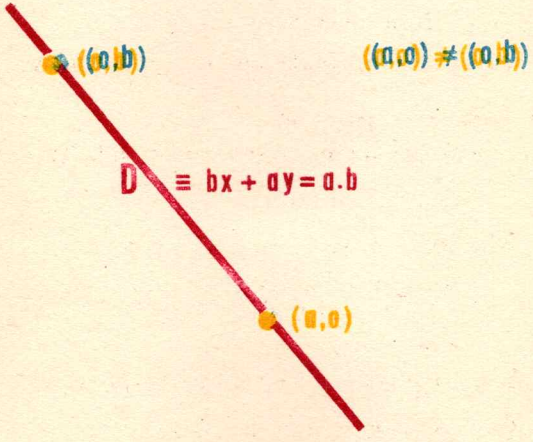


FIG. 334

4. Si



Entonces

FIG. 335

5. Si $m, n \in \mathbf{R}_o$

Entonces la recta D que comprende los puntos $(m, 0)$ y $(0, n)$ está definida por la ecuación

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

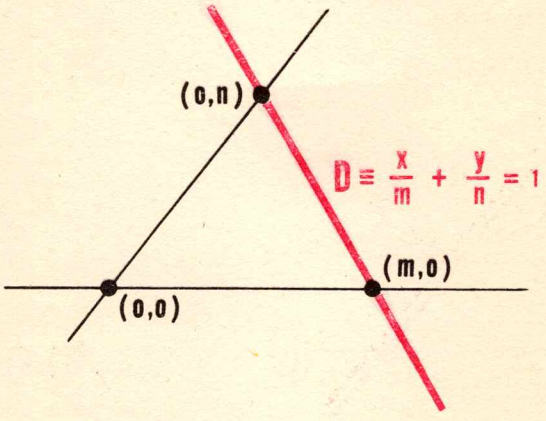


FIG. 336

6. He aquí una recta $D \equiv ax + by + c = 0$.
Toda paralela a D está definida por una ecuación $ax + by + \ldots = 0$

7. He aquí $D \equiv 2x + 3y - 2 = 0$
Escribe una ecuación de la recta E que comprenda $(1, -1)$ y sea paralela a D

Solución

$$E \equiv 2x + 3y + \ldots = 0$$
$$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + \ldots = 0$$

Luego

$$E \equiv 2x + 3y - (2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)) = 0$$
$$E \equiv 2x + 3y + 1 = 0$$

8. Ecuación de la recta D que comprende $(6, -3)$ y es paralela a

$$E \equiv 2x - 3y + 89 = 0$$

Solución

$$2 \cdot 6 - 3(-3) = 21$$

$$D \equiv 2x - 3y - 21 = 0$$

9. Ecuación de la recta que comprende $(-2, 5)$ y es paralela a

$$D \equiv 7x - 5y + 2.387 = 0$$

10. He aquí $D \equiv 2x + y - 1 = 0$

Escribe una ecuación de E, que comprende $(1, 2)$ y es paralela a D

Muestra que $2x + y - 1$ es constante en todo punto $(x, y) \in E$

¿Cuál es esta constante?

Solución

$$E \equiv 2x + y - 4 = 0$$

$$E \equiv 2x + y - 1 = 3$$

La constante pedida es 3

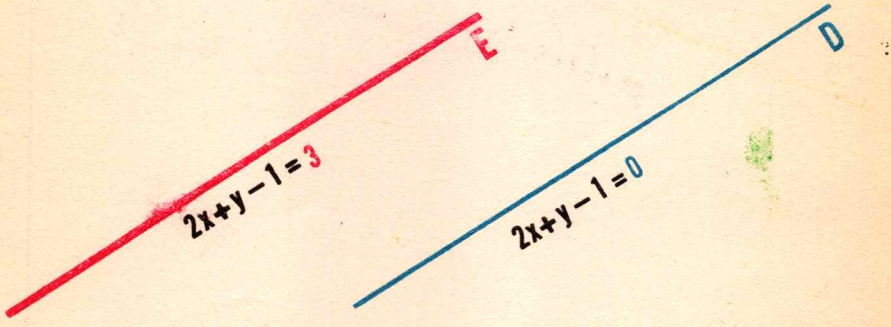


FIG. 337

11. Si Entonces Entonces Entonces Entonces Entonces

FIG. 338

12. Consideremos nuevamente la situación del ejercicio 11

Como $o\,e = X \parallel Y = o\,u$,

la recta D no puede ser a la vez paralela a X y a Y

Supongamos. $D \parallel Y$ de donde $b \neq o$

Luego Y corta a todas las rectas $D, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$

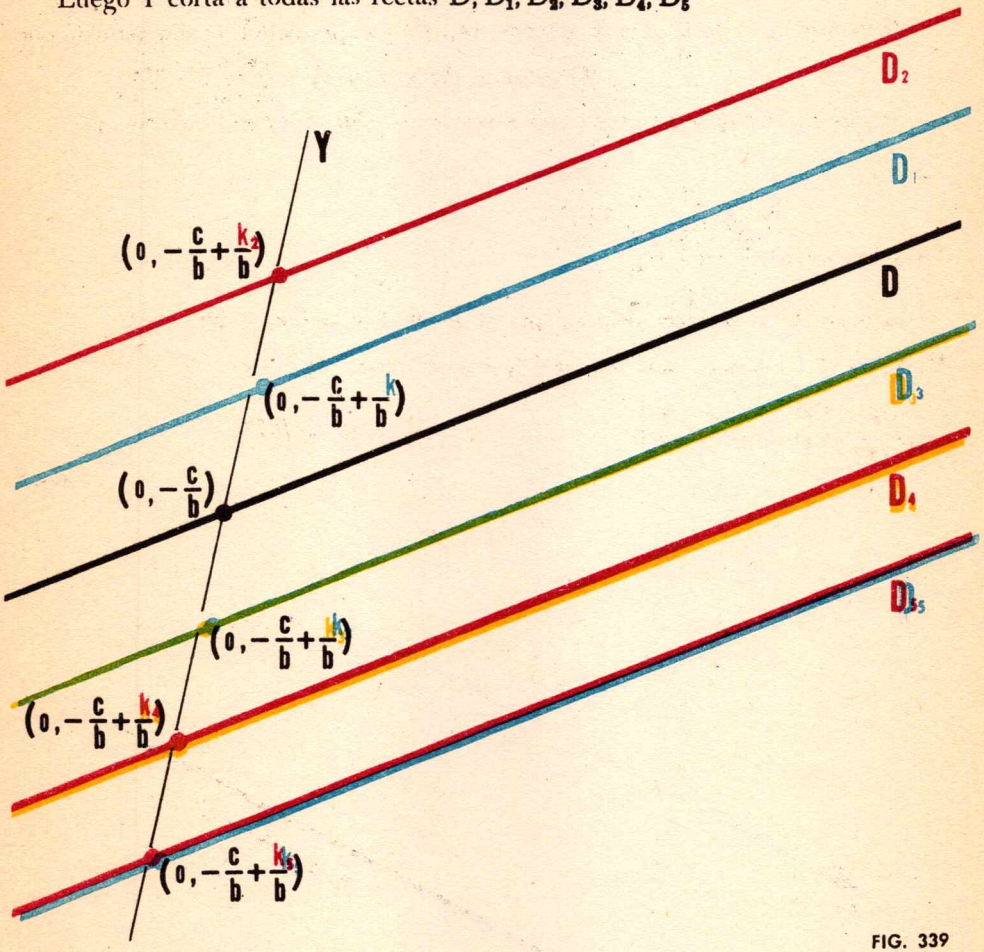


FIG. 339

13. $\Pi = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid o \cdot x + o \cdot y + o = o \}$

$\phi = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid o \cdot x + o \cdot y + 1 = o \}$

14. $\Pi \equiv ox + oy + o = o$

$\phi \equiv ox + oy + 1 = o$

7 — ECUACIÓN DE LA RECTA D_1 QUE COMPRENDE (x_1, y_1) Y ES PARALELA A $D \equiv ax + by + c = 0$

TEOREMA

Si $$D \equiv ax + by + c = 0$$

Entonces la recta D_1 que comprende (x_1, y_1) y es paralela a D está definida por

$$D_1 \equiv ax + by + c = k_1$$

donde $k_1 = ax_1 + by_1 + c$ (es el valor de "$ax + by + c$,, en (x_1, y_1))

DEMOSTRACIÓN:

Llamemos D_1 a la recta definida por $ax + by + c = (ax_1 + by_1 + c)$

1° $(x_1, y_1) \in D_1$ puesto, que $ax_1 + by_1 + c = (ax_1 + by_1 + c)$

2° $D \equiv ax + by + c = 0$
$D_1 \equiv ax + by + \ldots = 0$
} luego $D \parallel D_1$

l.q.q.d.

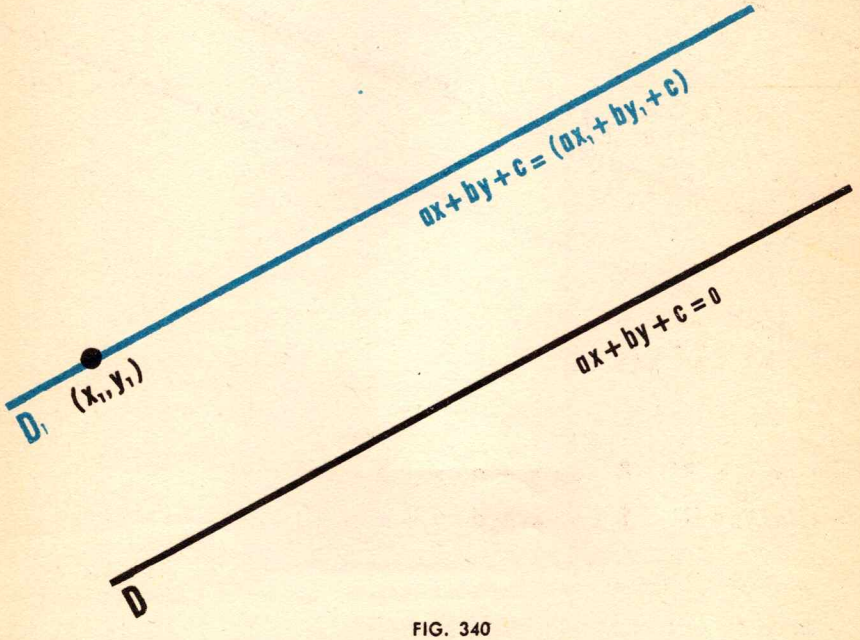


FIG. 340

8 — IMAGEN DE UNA RECTA POR ALGUNAS TRANSFORMACIONES DEL PLANO

Imagen de una recta por una homotecia de razón no nula.

Sabes que la imagen de toda recta D por la homotecia h de centro o y de razón $r \neq 0$ es una recta.

Volveremos a encontrar este resultado **analíticamente**, es decir, utilizando coordenadas y ecuaciones.

A tal efecto, fijemos una referencia (o, e, u) del plano Π (¡siendo o el centro de la homotecia dada!)

La imagen del punto (x, y) por h es el punto (rx, ry)

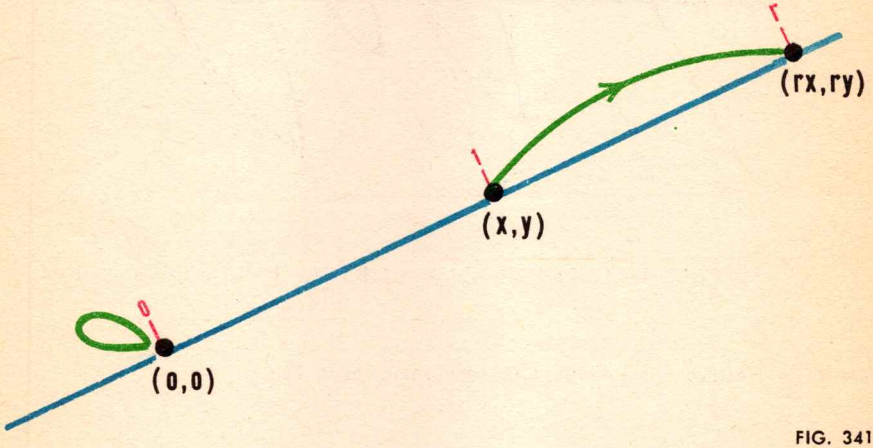


FIG. 341

He aquí una recta D

Sabemos que existen reales a, b, c tales que $D \equiv ax + by + c = 0$

Por consiguiente,

Si $\boxed{D \equiv ax + by + c = 0}$

$$(p, q) \in D \iff ap + bq + c = 0 \iff a \cdot rp + b \cdot rq + cr = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(rp, rq) \in hD \qquad\qquad (rp, rq) \in D' \equiv ax + by + cr = 0$$

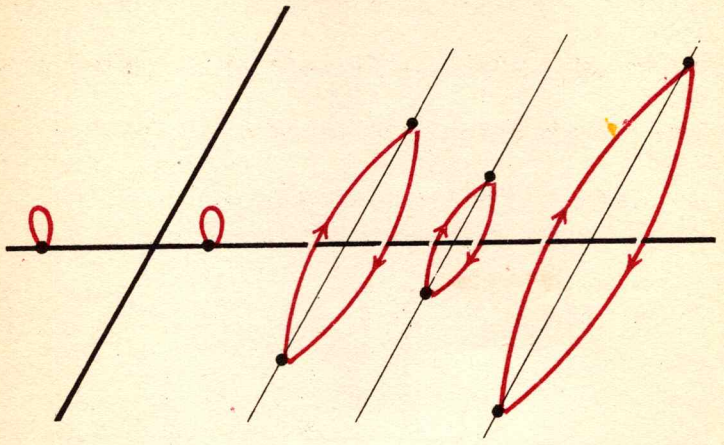
Luego $hD = D' \equiv ax + by + cr = 0$

Entonces $\boxed{hD \equiv ax + by + cr = 0}$

Este resultado prueba que hD es una recta paralela a D

Imagen de una recta por una simetría paralela.

He aquí una simetría paralela **s**



ALGUNAS CUPLAS DE LA SIMETRÍA PARALELA **s**

FIG. 342

Fijemos de manera conveniente una referencia para Π.

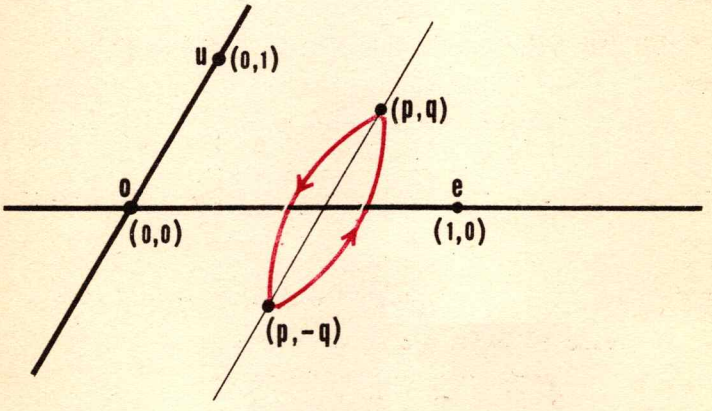


FIG. 343

La imagen del punto (p, q) por s es el punto $(p, -q)$
He aquí una recta $D \equiv ax + by + c = 0$

Si $D \equiv ax + by + c = 0$

$(p, q) \in D \iff ap + bq + c = 0 \iff ap - b(-q) + c = 0$

$(p, -q) \in sD \qquad (p, -q) \in D'' \equiv ax - by + c = 0$

Luego $sD = D'' \equiv ax - by + c = 0$

Entonces $sD \equiv ax - by + c = 0$

TEOREMA — **La imagen de una recta por una simetría paralela es una recta.**

EJERCICIOS

1. Toda simetría central es una homotecia de razón (-1).
   La imagen de una recta por una simetría central es una recta paralela.

2. Fijemos una referencia de Π.
   ¿Cuál es la imagen de (x, y) por la simetría de centro $(0, 0)$?
   ¿Cuál es la imagen por esta simetría de la recta $\equiv ax + by + c = 0$?

3. Las simetrías paralelas conservan el paralelismo y la equipolencia.

4. He aquí una simetría paralela s.
   Acabamos de ver que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \Leftrightarrow \overrightarrow{s(a)\,s(b)} = \overrightarrow{s(c)\,s(d)}$
   Pondremos $s(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{s(a)\,s(b)}$

5. Las simetrías paralelas son lineales.

6. Fijemos una referencia de Π.
   Llamemos t a la traslación que aplica $(0, 0)$ sobre (m, n)
   ¿Cuál es la imagen de (p, q) por t?

   Si $D \equiv ax + by + c = 0$

   Entonces $tD \equiv ax + by + (c - am - bn) = 0$

17 Semiplanos e inecuaciones

$a, b, c \in R$

y

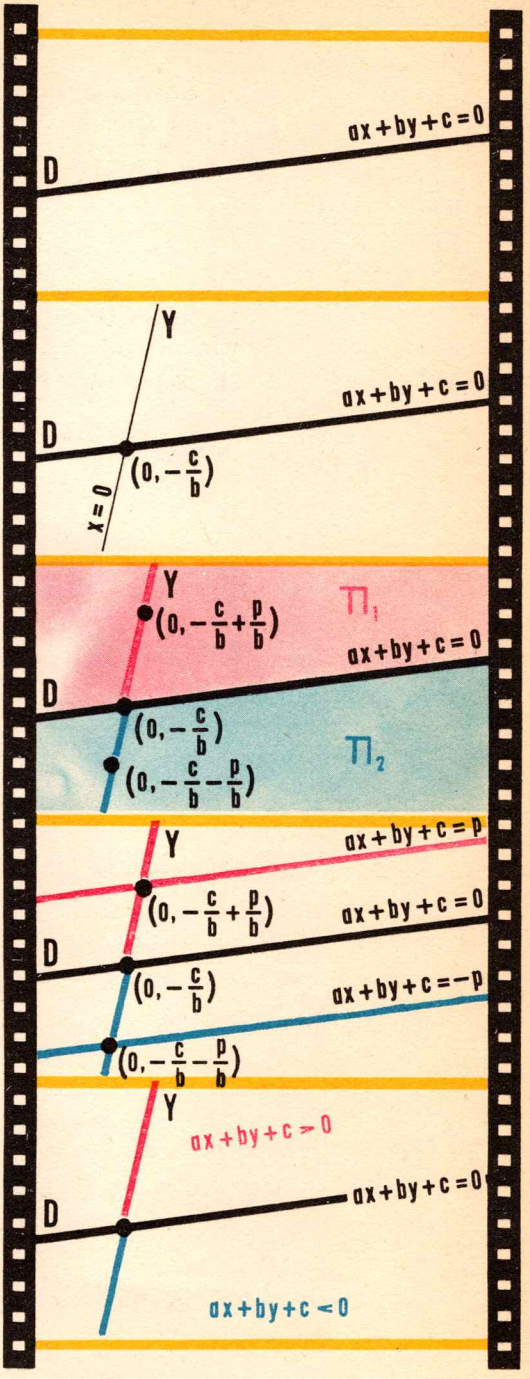
$a \neq 0$ o $b \neq 0$

Supongamos primero

$b \neq 0$

Luego $Y \nparallel D$

$p > 0$



1 — SEMIPLANOS E INECUACIONES

FIG. 344

Bajo la hipótesis $b \neq 0$

acabamos de probar que

$$\Pi_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c > 0\}$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$
$$\Pi_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c < 0\}$$

Brevemente:

$$\Pi_1 \equiv ax + by + c > 0$$
$$D \equiv ax + by + c = 0$$
$$\Pi_1 \equiv ax + by + c < 0$$

Si $a \neq 0$

Entonces la demostración anterior sigue siendo válida . . .

con la condición de intercambiar b y a, y y x, Y y X

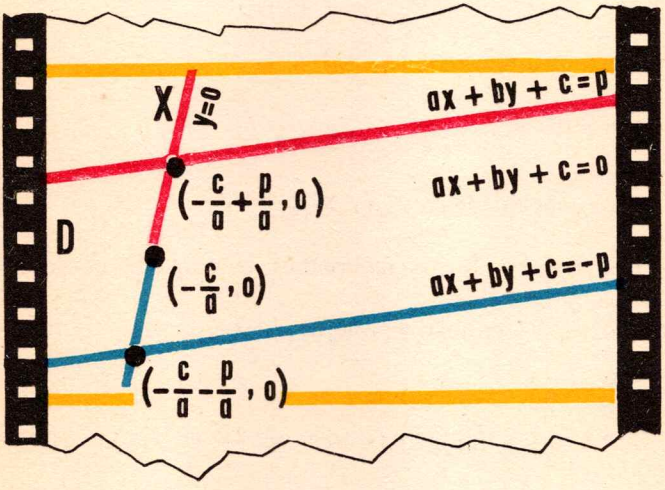


FIG. 345

TEOREMA

Si $D \equiv ax + by + c = 0$

Entonces $\Pi_1 \equiv ax + by + c > 0$ y $\Pi_2 \equiv ax + by + c < 0$

son los semiplanos abiertos de borde D

EJERCICIOS

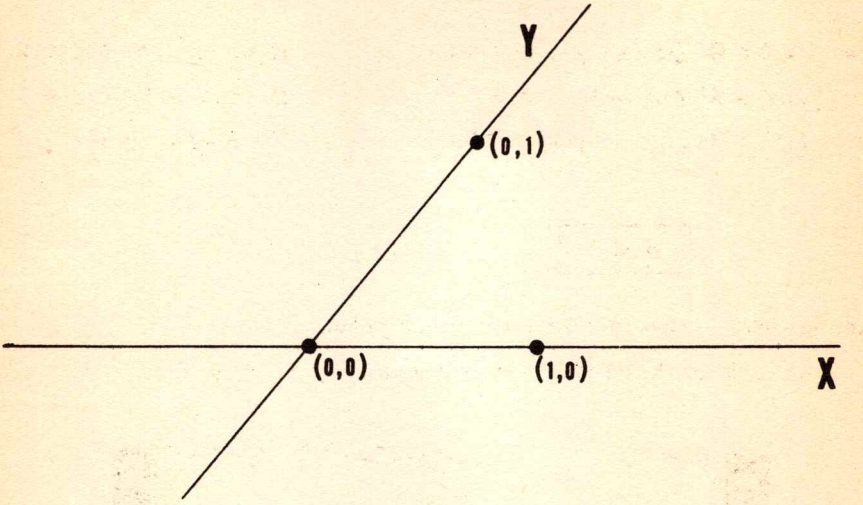


FIG. 346

1. Escribe una ecuación de la recta X

2. Escribe inecuaciones de los semiplanos abiertos de borde X

3. $X' \equiv y > 0$ es el semiplano abierto de borde X que comprende (0,1)
   $X'' \equiv y < 0$ ...

4. $X' \equiv y \geqslant 0$ es el semiplano cerrado de borde X que comprende (0, 1).
   $X'' \equiv$ ...

5. $X \cup Y = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0 \}$
   Brevemente: $X \cup Y \equiv xy = 0$

6. $E = \Pi \setminus (X \cup Y) \equiv xy \neq 0$

7. Si $D \equiv ax + by + c = 0$, $D' \equiv a'x + b'y + c' = 0$
   Entonces $D \cup D' \equiv$ ...
   $\Pi \setminus (D \cup D') \equiv$ ...

8.

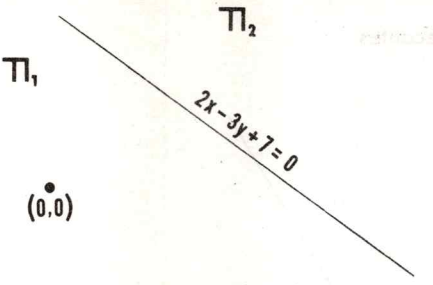
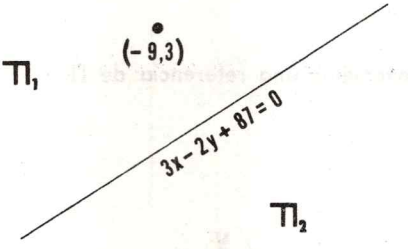


FIG. 347

Π_1 y Π_2 son los semiplanos abiertos cuyo borde está definido por $2x - 3y + 7 = 0$

Escribe una inecuación de Π_1

9.



Escribe una inecuación de Π_2

FIG. 348

10. ¿Qué piensas de este dibujo?

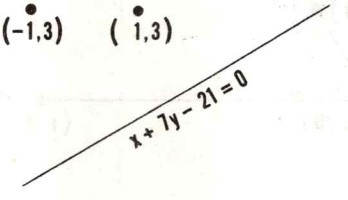


FIG. 349

11. Colorea el semiplano definido por

$$x + y - 2 \geqslant 0$$
$$x - y + 1 < 0$$
$$2x - 3y < 2y - 1$$
$$7x - 3y - 7 < 2x - 9y - 3$$

2 — REGIONES DEL PLANO DEFINIDAS POR DOS RECTAS SECANTES

He aquí dos rectas secantes

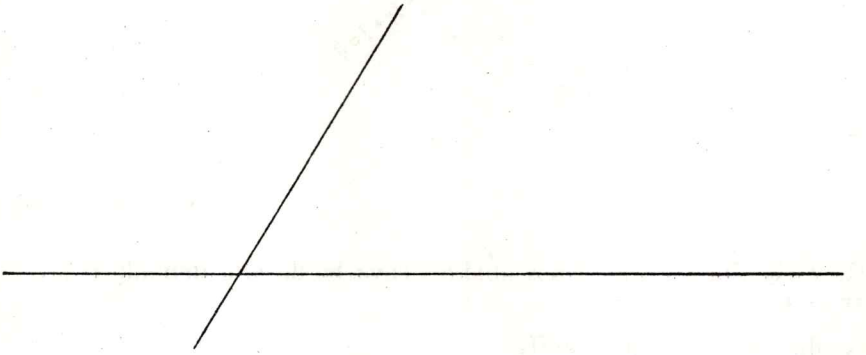


FIG. 350

Fijemos de manera conveniente una referencia de Π

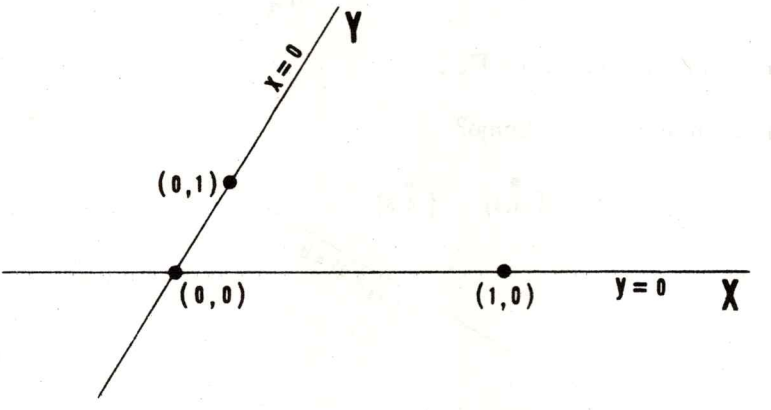


FIG. 351

Pongamos $E = \Pi \setminus (X \cup Y)$

$X_1 = E \cap$ (semiplano abierto de borde X que comprende (0,1))

$Y_1 = E \cap$ (semiplano abierto de borde Y que comprende (1,0))

$X_0 = E \setminus X_1$, $Y_0 = E \setminus Y_1$

— Escribe la coordenada de un punto de X_1, de X_0, de Y_1, de Y_0

— ...

— ¿No acabamos de establecer que $\{X_1, X_0\}$ y $\{Y_1, Y_0\}$ son particiones de E? Ocupémonos de la primera de estas particiones.

Para todo $p \in E$: una y sólo una de las eventualidades

$$0 : p \notin X_1 \qquad\qquad 1 : p \in X_1$$

que traduce el diagrama

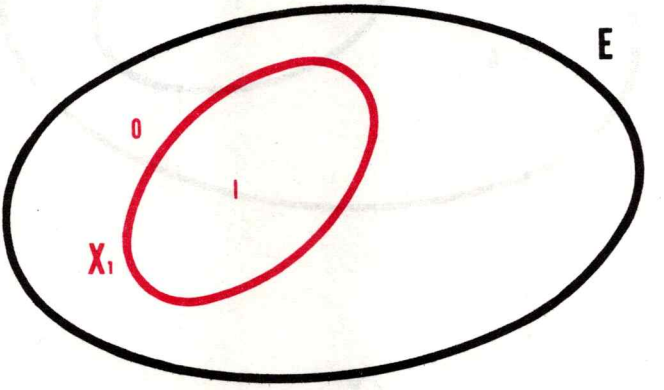


FIG. 352

Lleva esta información sobre la figura 353

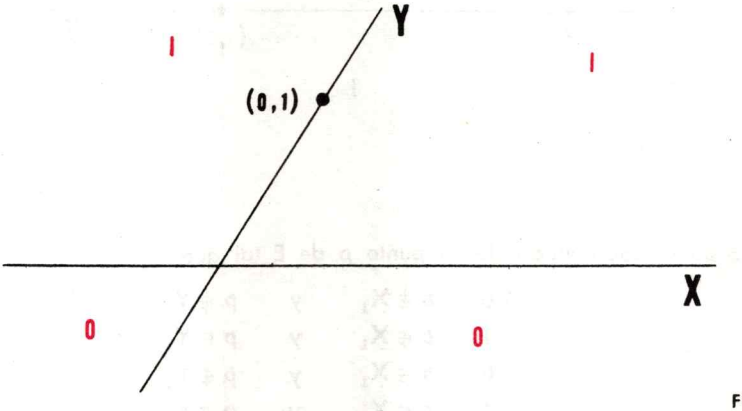


FIG. 353

Procede del mismo modo para la partición $\{Y_0, Y_1\}$ de E

Para todo $p \in E$: una y sólo una de las eventualidades

0 : $p \notin Y_1$ **1** : $p \in Y_1$

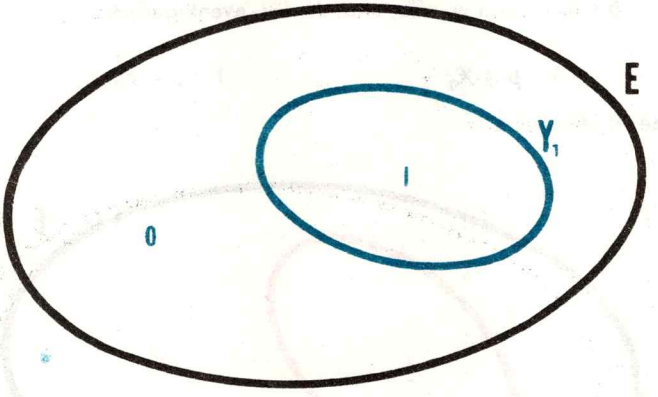


FIG. 354

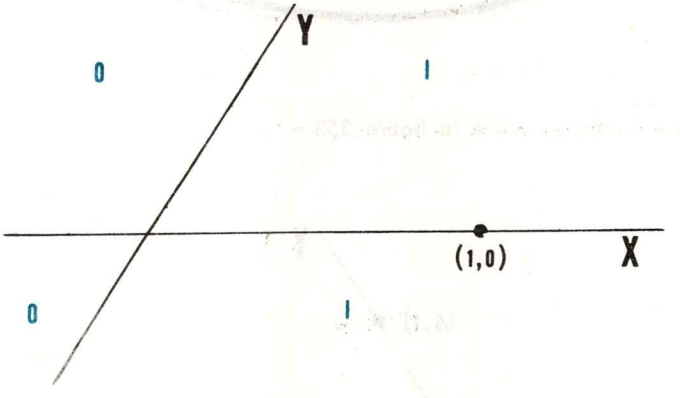


FIG. 355

— Escribe la coordenada de un punto p de E tal que

0 0 : $p \notin X_1$ y $p \notin Y_1$
0 1 : $p \notin X_1$ y $p \in Y_1$
1 0 : $p \in X_1$ y $p \notin Y_1$
1 1 : $p \in X_1$ y $p \in Y_1$

— ¿Conclusión?

— Para todo $p \in E$, una y sólo una de las eventualidades siguientes

$$\begin{aligned} 0\,0 &: \quad p \notin X_1 \ , \ p \notin Y_1 \\ 0\,1 &: \quad p \notin X_1 \ , \ p \in Y_1 \\ 1\,0 &: \quad p \in X_1 \ , \ p \notin Y_1 \\ 1\,1 &: \quad p \in X_1 \ , \ p \in Y_1 \end{aligned}$$

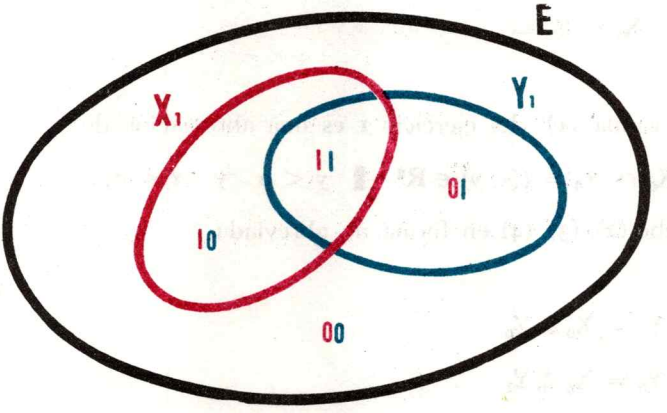


FIG. 356

— Lleva esta información sobre la figura 357

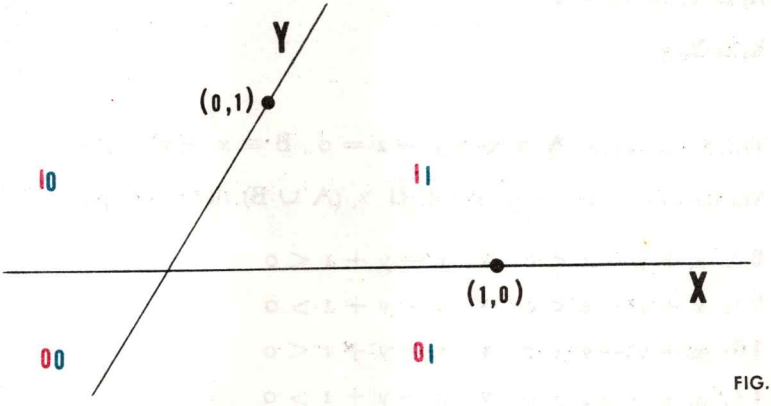


FIG. 357

Brevemente:

Dos rectas secantes A, B determinan cuatro regiones de $\Pi \setminus (A \cup B)$

EJERCICIOS

Con las notaciones recién introducidas,

1. 00 : $X_0 \cap Y_0 \equiv (y < 0 \quad y \quad x < 0)$ (1)
   01 : $X_0 \cap Y_1 \equiv (y < 0 \quad y \quad x > 0)$ (2)
   10 : $X_1 \cap Y_0 \equiv (\quad\quad\quad\quad)$ (3)
   11 : $X_1 \cap Y_1 \equiv$ (4)

2. La fórmula (1) del ejercicio 1 es una abreviación de

$$X_0 \cap Y_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < 0 \quad y \quad x < 0\}$$

Escribe (2), (3), (4) en forma no abreviada.

3. $X_1 \Delta Y_1 = X_0 \Delta Y_0$

$X_1 \Delta Y_0 = X_0 \Delta Y_1$

4. $X_1 \Delta Y_1 \equiv \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy < 0\}$

$X_1 \Delta Y_1 \equiv xy < 0$

$X_1 \Delta Y_0 \equiv \ldots$

5. Traza las rectas $A \equiv x + y - 2 = 0$, $B \equiv x - y + 1 = 0$

Marca las cuatro regiones de $\Pi \setminus (A \cup B)$ definidas por

00: $x + y - 2 < 0 \quad y \quad x - y + 1 < 0$
01: $x + y - 2 < 0 \quad y \quad x - y + 1 > 0$
10: $x + y - 2 > 0 \quad y \quad x - y + 1 < 0$
11: $x + y - 2 > 0 \quad y \quad x - y + 1 > 0$

6. ¿Cuántas regiones de $\Pi \setminus (A \cup B)$ determinan las rectas disjuntas A y B?

3 — REGIONES DEL PLANO DEFINIDAS POR TRES PUNTOS NO ALINEADOS

— He aquí puntos no alineados $a, b, c \in \Pi$

Pongamos $A = bc$, $B = ac$, $C = ab$

$E = \Pi \setminus (A \cup B \cup C)$

$A_1 = E \cap$ (el semiplano abierto de borde A que comprende a)

$B_1 = E \cap$ (el semiplano abierto de borde B que comprende b)

$C_1 = E \cap$ (el semiplano abierto de borde C que comprende c)

$A_0 = E \setminus A_1$, $B_0 = E \setminus B_1$, $C_0 = E \setminus C_1$

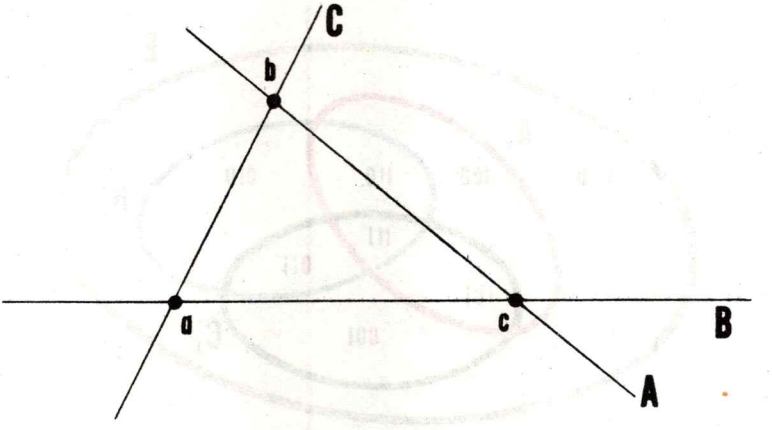


FIG. 358

1°) $A_1 \cap A_0 = B_1 \cap B_0 = C_1 \cap C_0 = \phi$

2°) $A_1 \cup A_0 = B_1 \cup B_0 = C_1 \cup C_0 = E$

3°) Para todo $p \in E$:

- una y sólo una de las eventualidades — 0 : $p \notin A_1$ — 1 : $p \in A_1$
- una y sólo una de las eventualidades — 0 : $p \notin B_1$ — 1 : $p \in B_1$
- una y sólo una de las eventualidades — 0 : $p \notin C_1$ — 1 : $p \in C_1$

4º) Luego, **a primera vista**, para todo $p \in E$, hay ocho eventualidades mutuamente excluyentes (que enumeramos en binario de cero hasta siete).

$$
\begin{array}{lccc}
000: & p \notin A_1 & p \notin B_1 & p \notin C_1 \\
001: & p \notin A_1 & p \notin B_1 & p \in C_1 \\
010: & p \notin A_1 & p \in B_1 & p \notin C_1 \\
011: & p \notin A_1 & p \in B_1 & p \in C_1 \\
100: & p \in A_1 & p \notin B_1 & p \notin C_1 \\
101: & p \in A_1 & p \notin B_1 & p \in C_1 \\
110: & p \in A_1 & p \in B_1 & p \notin C_1 \\
111: & p \in A_1 & p \in B_1 & p \in C_1
\end{array}
$$

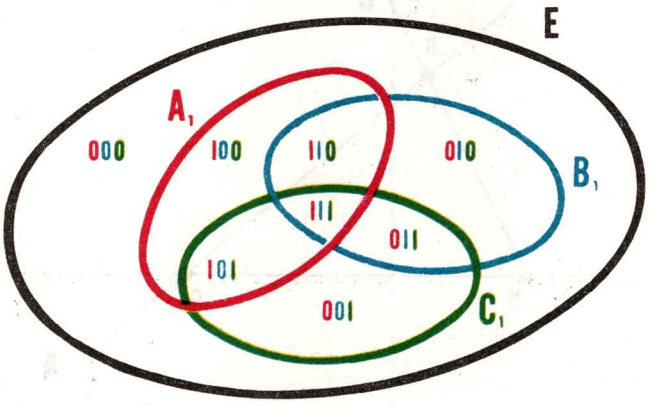


FIG. 359

Dicho de otro modo

$$
\begin{array}{ll}
000: & p \in A_0 \cap B_0 \cap C_0 \\
001: & p \in A_0 \cap B_0 \cap C_1 \\
010: & p \in A_0 \cap B_1 \cap C_0 \\
011: & p \in A_0 \cap B_1 \cap C_1 \\
100: & p \in A_1 \cap B_0 \cap C_0 \\
101: & p \in A_1 \cap B_0 \cap C_1 \\
110: & p \in A_1 \cap B_1 \cap C_0 \\
111: & p \in A_1 \cap B_1 \cap C_1
\end{array}
$$

5º) ¿Pueden presentarse las ocho eventualidades indicadas?

Es decir, ¿los conjuntos

$$A_0 \cap B_0 \cap C_0 \,,\; A_0 \cap B_0 \cap C_1 \,,\; A_0 \cap B_1 \cap C_0 \,,\; A_0 \cap B_1 \cap C_1,$$
$$A_1 \cap B_0 \cap C_0 \,,\; A_1 \cap B_0 \cap C_1 \,,\; A_1 \cap B_1 \cap C_0 \,,\; A_1 \cap B_1 \cap C_1$$

son todos no vacíos?

6º) Probemos que $A_0 \cap B_0 \cap C_0 = \phi$

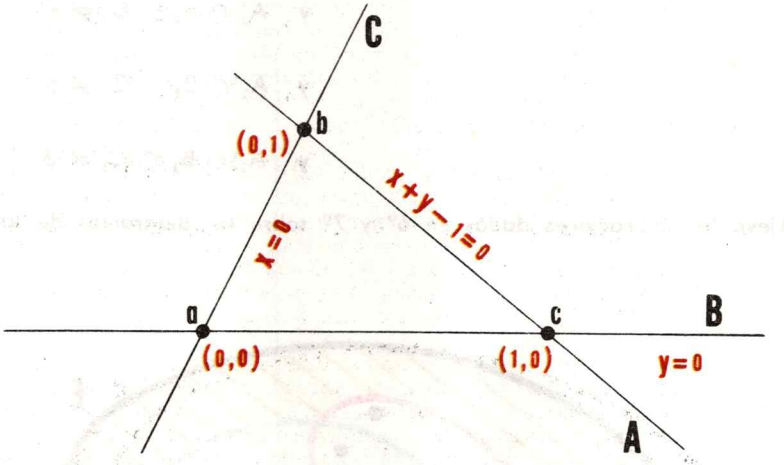


FIG. 360

$A_0 \equiv x + y - 1 > 0$

$B_0 \equiv y < 0$

$C_0 \equiv x < 0$

$$A_0 \cap B_0 \cap C_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\big|\; x < 0,\ y < 0,\ x + y - 1 > 0\} = \phi$$

Así la eventualidad **0 0 0** *no puede presentarse.*

7º) Mostremos que las otras siete eventualidades se presentan efectivamente

0 0 1: $A_0 \cap B_0 \cap C_1 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y - 1 > 0,\ x > 0,\ y < 0 \}$

luego $(3, -1) \in A_0 \cap B_0 \cap C_1$ y $A_0 \cap B_0 \cap C_1 \neq \phi$

0 1 0: $A_0 \cap B_1 \cap C_0 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid$ $\}$

luego $(-1, 3) \in A_0 \cap B_1 \cap C_0$ y $A_0 \cap B_1 \cap C_0 \neq \phi$

0 1 1: $A_0 \cap B_1 \cap C_1 = \{$ $\}$

luego $(1, 1) \in \ldots$ y $A_0 \cap B_1 \cap C_1 \neq \phi$

1 0 0: $A_1 \cap B_0 \cap C_0 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y - 1 < 0,\ x < 0,\ y < 0 \}$

luego $\ldots \in A_1 \cap B_0 \cap C_0$ y $A_1 \cap B_0 \cap C_0 \neq \phi$

1 0 1:

y $A_1 \cap B_0 \cap C_1 \neq \phi$

1 1 0:

y $A_1 \cap B_1 \cap C_0 \neq \phi$

1 1 1:

y $A_1 \cap B_1 \cap C_1 \neq \phi$

8º) Lleva las indicaciones dadas en 6º y 7º sobre los diagramas de la fig. 361.

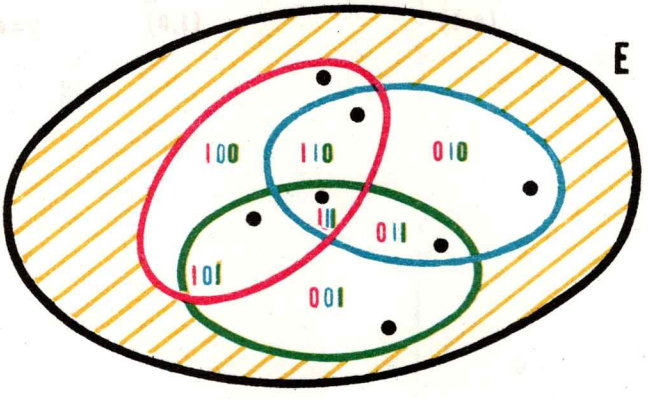


FIG. 361

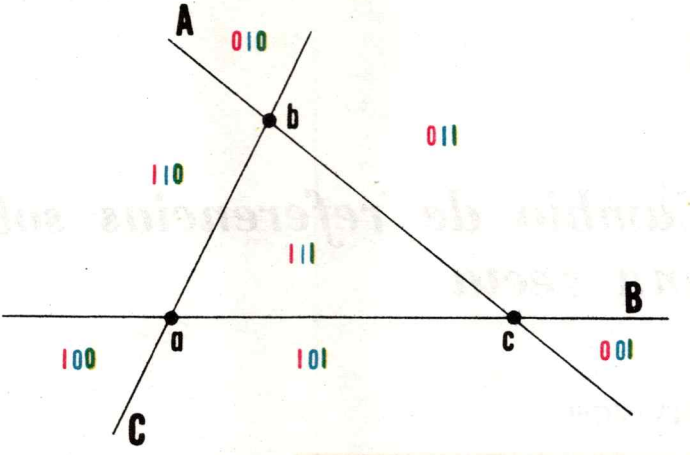


FIG. 362

$A_1 \cap B_1 \cap C_1$ se llama el **interior** del triángulo *abc*

Brevemente,

Los puntos no alineados ***a, b, c*** *determinan SIETE regiones de* $\text{II} \setminus (ab \cup bc \cup ca)$

EJERCICIOS

1. He aquí $A \equiv 2x - y + 5 = 0$
   $B \equiv x + y - 7 = 0$
   $C \equiv x - 3y + 1 = 0$
   Si I es el interior del triángulo determinado por **A, B, C**
   Entonces $I \equiv \ldots$ y $\ldots$ y $\ldots$

2. He aquí las rectas $B \neq A \parallel B \nparallel C$.
   ¿Cuántas regiones de $\text{II} \setminus (A \cup B \cup C)$ determinadas por **A, B, C** hay?

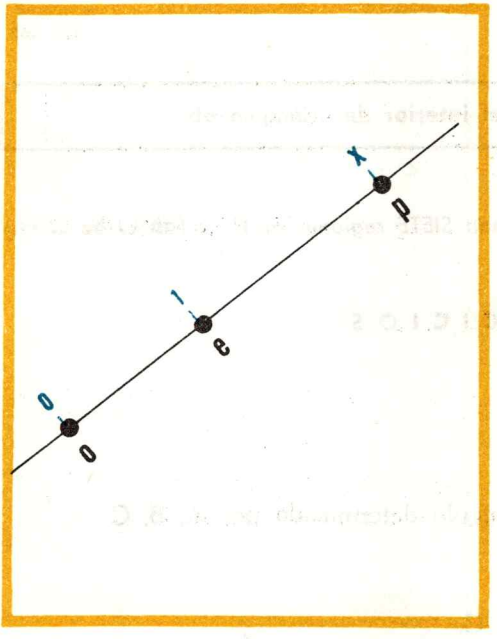
3. La misma pregunta cuando las tres rectas distintas **A, B, C** comprenden un mismo punto.

4. El mismo problema cuando las tres rectas distintas **A, B, C** son paralelas.

18

Cambio de referencias sobre una recta

O — REVISION



$$\overrightarrow{op} = x \cdot \overrightarrow{oe}$$

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} = t$$

$$\overrightarrow{ab} = t\ \overrightarrow{cd}$$

FIG. 363

1 — RAZÓN Y ABSCISA

He aquí una recta graduada D

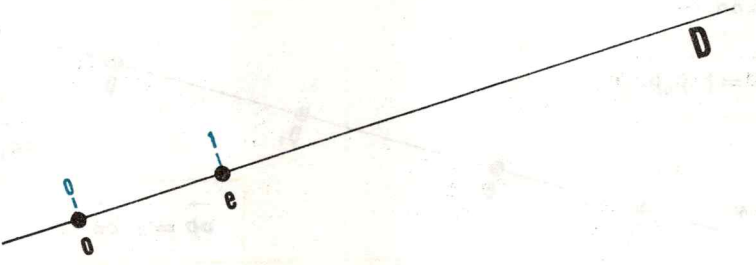


FIG. 364

He aquí $x_0, x_1, x \in \mathbf{R}$ con $x_0 \neq x_1$

Llamemos p_0, p_1, p los puntos de D,

de abscisas x_0, x_1, x (Luego $p_0 \neq p_1$)

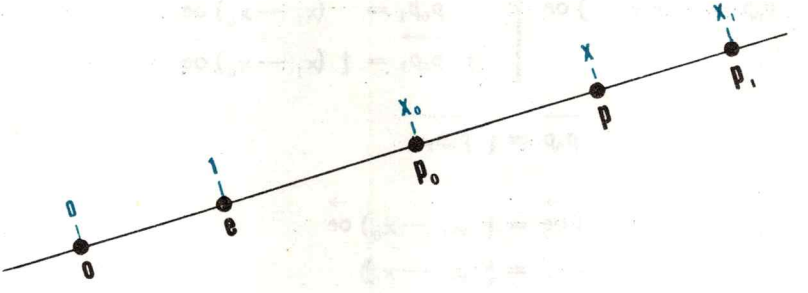


FIG. 365

La terna de **números** (x_0, x_1, x)

determina la terna de **puntos** (p_0, p_1, p)

y determina la **razón** $t = \dfrac{\overrightarrow{p_0 p}}{\overrightarrow{p_0 p_1}}$

Problema

Se te da $x_0, x_1, x \in \mathbf{R}$ con $x_0 \neq x_1$

Calcula t

Solución

$\overrightarrow{p_0p} = t\ \overrightarrow{p_0p_1}$

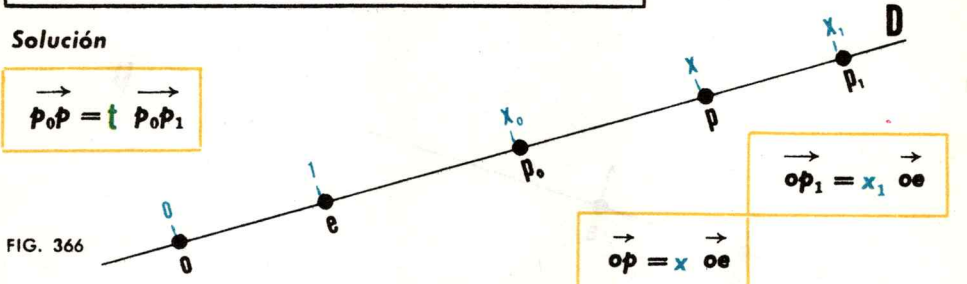


FIG. 366

$\overrightarrow{op_1} = x_1\ \overrightarrow{oe}$

$\overrightarrow{op} = x\ \overrightarrow{oe}$

$\overrightarrow{op_0} = x_0\ \overrightarrow{oe}$

¡La máquina industrial **ESPACIO VECTORIAL** trabaja por ti!

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_0p} &= \overrightarrow{p_0o} + \overrightarrow{op} \\
\overrightarrow{p_0p} &= \overrightarrow{op} - \overrightarrow{op_0} \\
\overrightarrow{p_0p} &= x\ \overrightarrow{oe} - x_0\ \overrightarrow{oe} \\
\overrightarrow{o_0p} &= (x - x_0)\ \overrightarrow{oe}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_0p_1} &= \overrightarrow{p_0o} + \overrightarrow{op_1} \\
\overrightarrow{p_0p_1} &= \overrightarrow{op_1} - \overrightarrow{op_0} \\
\overrightarrow{p_0p_1} &= x_1\ \overrightarrow{oe} - x_0\ \overrightarrow{oe} \\
\overrightarrow{p_0p_1} &= (x_1 - x_0)\ \overrightarrow{oe} \\
t\ \overrightarrow{p_0p_1} &= t\ (x_1 - x_0)\ \overrightarrow{oe}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{p_0p} = t\ \overrightarrow{p_0p_1}$

$$(x - x_0)\ \overrightarrow{oe} = t\ (x_1 - x_0)\ \overrightarrow{oe}$$

$$x - x_0 = t\ (x_1 - x_0)$$

$$t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

(¡Justifica las etapas del cálculo!)

Si x_0, x_1, x son las abscisas de $p_0, p_1, p \in D_{01}$ y $x_0 \neq x_1$

Entonces $\dfrac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p_0p_1}} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

2 — CAMBIO DE REFERENCIA SOBRE UNA RECTA Y EL CAMBIO DE ABSCISA QUE DE ALLÍ RESULTA

He aquí una referencia azul $(0, 1)$ y una referencia roja $(0, 1)$ de la recta D

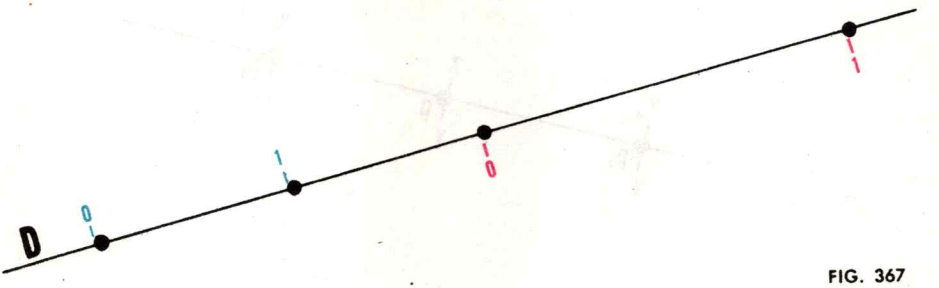


FIG. 367

Anotaremos con azul las abscisas relativas a la referencia azul, y con rojo las abscisas relativas a la referencia roja.

También nos permitiremos hablar brevemente de abscisas azules y rojas.

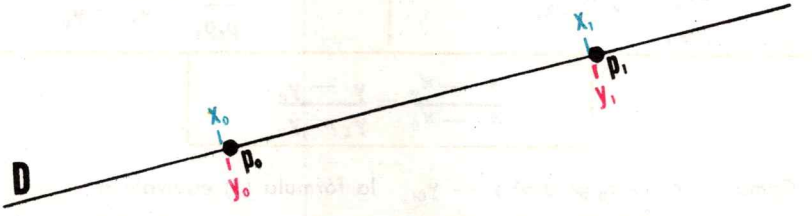


FIG. 368

Problema

Si (x_0, y_0) es la cupla formada por la abscisa azul y la abscisa roja del mismo punto

(x_1, y_1) es la cupla formada por la abscia azul y la abscisa roja de **otro** punto

por lo tanto

$$x_0 \neq x_1 \quad \text{y} \quad y_0 \neq y_1$$

Entonces encuentra una fórmula que permita pasar de la abscisa azul x de cualquier punto $p \in D$ a su abscisa roja y; y recíprocamente.

Solución

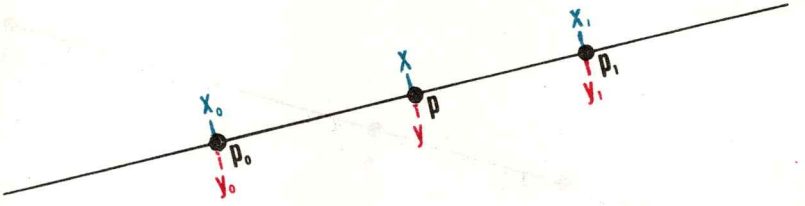


FIG. 369

$$\frac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p_0p_1}} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad \frac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p_0p_1}} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{1}$$

Como $x_1 - x_0 \neq 0 \neq y_1 - y_0$, la fórmula (1) equivale a

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0 \tag{2}$$

de donde

$$y - y_0 = (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad x - x_0 = (x_1 - x_0)\frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad x - x_0 = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}(y - y_0)$$

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad x = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}(y - y_0)$$

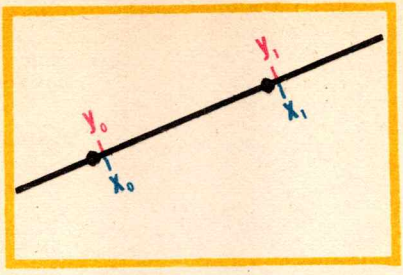
¡Y el problema está resuelto!

¿Qué piensas de la fórmula (2)?

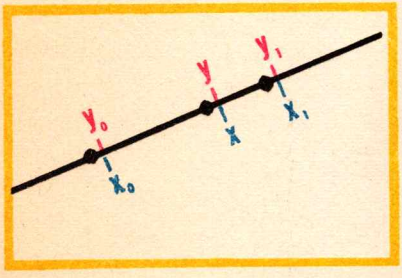
(cfr. C. 16, § 4)

3 — GRÁFICO DE UN CAMBIO DE ABSCISAS

Si



Entonces



$$\Leftrightarrow \quad (y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0$$

FIG. 370

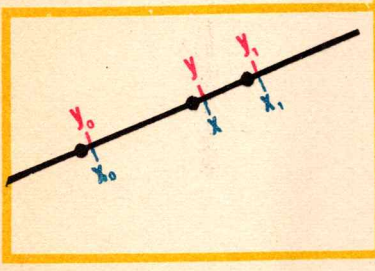
Fijemos una referencia en Π.

La ecuación dada define, pues, la recta C que comprende los puntos

$$(x_0, y_0) \text{ y } (x_1, y_1)$$

Luego

El cambio de abscisa definido por



está perfectamente representado por la recta C

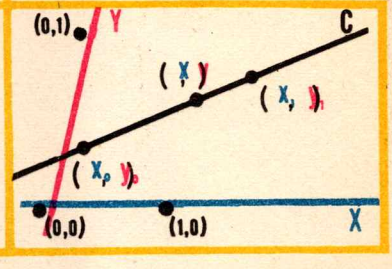


FIG. 371

4 — DETERMINACIÓN DE TEMPERATURAS

He aquí un termómetro de mercurio.

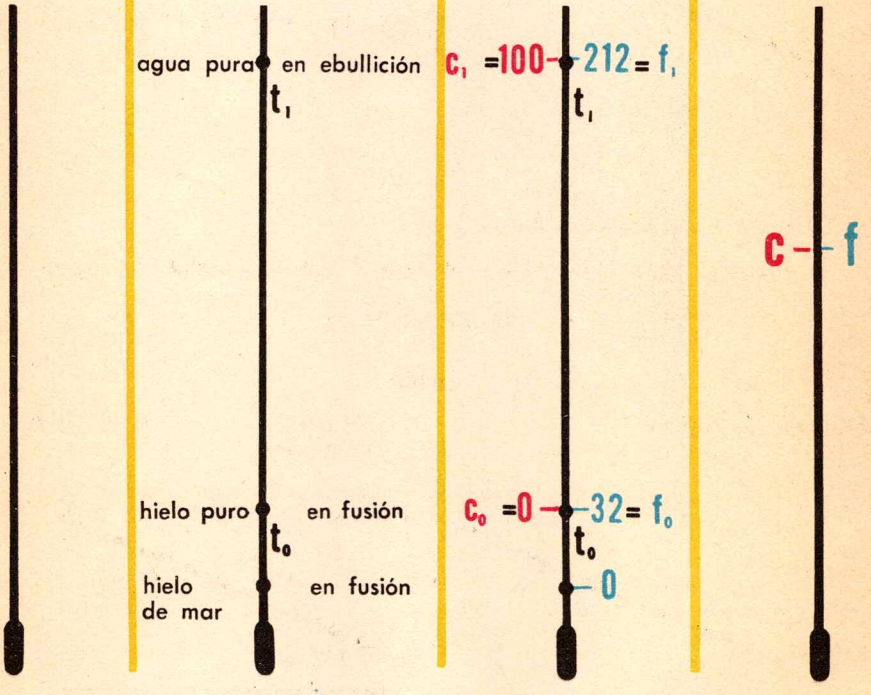
Niveles del mercurio cuando se introduce el termómetro

1. en el agua pura en ebullición
2. en el hielo puro en fusión
3. en el hielo de mar en fusión

Las *abscisas rojas* determinan la escala **CELSIUS**

Las *abscisas azules fijan* la escala **FAHRENHEIT**

PROBLEMA



ESCALAS DE TEMPERATURAS

FIG. 372

Problema:

Calcular c, conociendo f. — Calcular f, conociendo c

Solución:

Simple aplicación de § 2

$$c = c_0 + \frac{c_1 - c_0}{f_1 - f_0}(f - f_0) \qquad f = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{c_1 - c_0}(c - c_0)$$

$$\boxed{c = \frac{5}{9}(f - 32)} \qquad \boxed{f = 32 + \frac{9}{5}c}$$

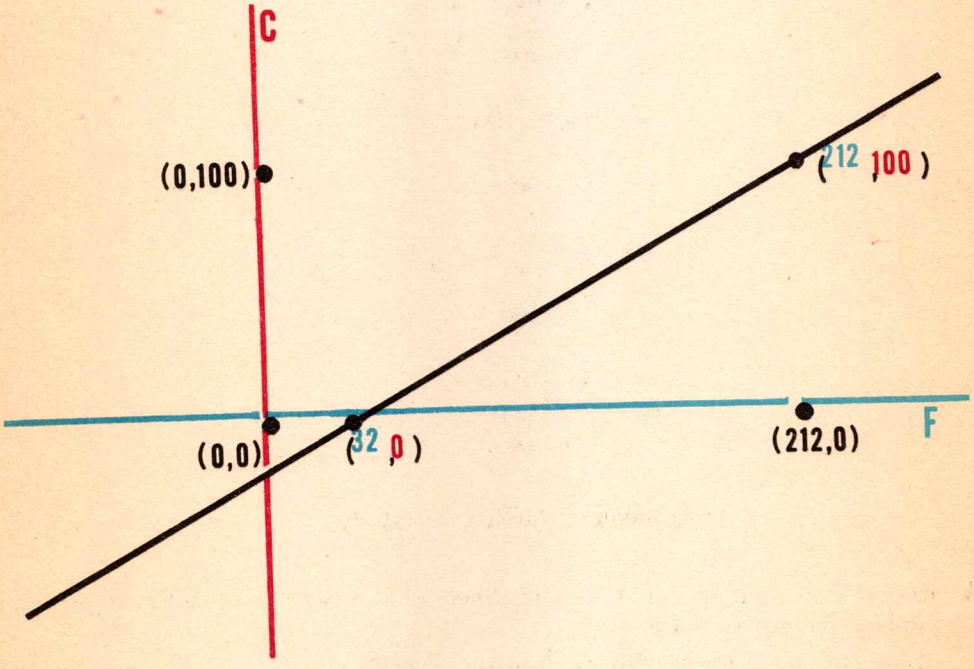


GRÁFICO DEL CAMBIO DE ESCALA DE TEMPERATURA
FAHRENHEIT — CENTÍGRADA

FIG. 393

EJERCICIOS

Salvo aviso contrario, supondremos siempre que se ha fijado una referencia de Π

1. m es el punto medio de $[p_0, p_1]$ **ssi** $\dfrac{\overrightarrow{p_0m}}{\overrightarrow{p_0p_1}} = \dfrac{1}{2}$

2. En la recta graduada D_{01}

   x_0, x_1, x son las abscisas de los puntos p_0, p_1, m

   Por consiguiente

   m es el punto medio de $[p_0, p_1]$

   ssi

   $$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{2}$$

   ssi

   $$x - x_0 = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)$$

   ssi

   $$x - x_0 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_0$$

   ssi

   $$x = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$$

   ssi

   x es la **media aritmética** de (x_0, x_1)

3. El ejercicio anterior definió implícitamente la media aritmética de una cupla de números reales.

   ¿Cuál es la media aritmética de la cupla de reales (a, b)?

4. Calcula las medias aritméticas de las cuplas siguientes:

   $(5, 2)$, $(2, 5)$, $(-2, 5)$, $(-5, -2)$, $(5, 5)$,

   $(0, 7)$, $(7, 0)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}, \frac{2}{7}\right)$

5. Abscisa del punto medio de un segmento = media aritmética de las abscisas de los extremos.

6. En la recta D_{01}
2, 3, 5 son las abscisas de los puntos **a, b, c,**
Calcula las razones

$$\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}} \quad , \quad \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{bc}} \quad , \quad \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ba}} \quad , \quad \frac{\overrightarrow{aa}}{\overrightarrow{ab}} \quad , \quad \frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}$$

7. En la recta D_{01}:

x_0, x_1, x son las abscisas de los puntos distintos p_0, p_1, p

$$\frac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p_0p_1}} = \frac{x_0 - x}{x_0 - x_1} \; ; \quad \frac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p\,p_1}} = \frac{x_0 - x}{x - x_1} \; ;$$

$$\frac{\overrightarrow{p_0p_1}}{\overrightarrow{p\,p_1}} = \frac{x_0 - x_1}{x - x_1} \; ; \quad \frac{\overrightarrow{p_1p}}{\overrightarrow{p\,p_0}} = \frac{x_1 - x}{x - x_0}$$

8. En D_{01}, las abscisas de los puntos distintos p_0, p_1, son x_0, x_1
Calcula la abscisa x del punto p, sabiendo que

$$\frac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p_0p_0}} = \frac{1}{3} \qquad \frac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p\,p_1}} = 1 \qquad \frac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p\,p_1}} = 5 \qquad \frac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p\,p_1}} = -2$$

9. Se recuerda – Las proyecciones paralelas conservan la razón de vectores paralelos.

10. He aquí puntos distintos p_0, p_1, de coordenadas $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$
Se te indica que el punto p de coordenada (x, y) pertenece a la recta p_0p_1

Si $p_0p_1 \nparallel Y$, **entonces** $\dfrac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p_0p_1}} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Si $p_0p_1 \nparallel X$, **entonces** $\dfrac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{p_0p_1}} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$

11. $\left(\dfrac{x_0 + x_1}{2}, \dfrac{y_0 + y_1}{2}\right)$ es el punto medio de $[(x_0, y_0), (x_1, y_1)]$

12. Calcula los puntos medios de los segmentos

$[(2, 3) ; (-5, 2)]$, $[(0, 0) ; (0, 4)]$, $[(-1, 7) ; (-5, -2)]$,

$[(2, 0) ; (4, 0)]$, $[(2, 7) ; (4, 7)]$, $\left[\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right) ; \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)\right]$

13. He aquí $a = (2, 5)$, $b = (-2, 3)$

Calcula $c \in ab$ tal que

1° $\dfrac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}} = \dfrac{2}{3}$ 2° $\dfrac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{bc}} = -\dfrac{1}{2}$ 3° $\dfrac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{cb}} = 3$

14.

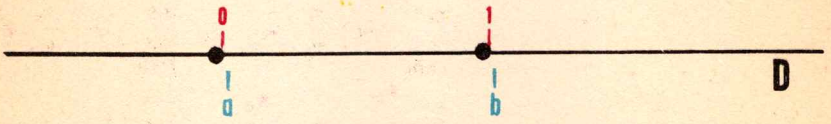


FIG. 374

Representa gráficamente este cambio de abscisa $x \to y$

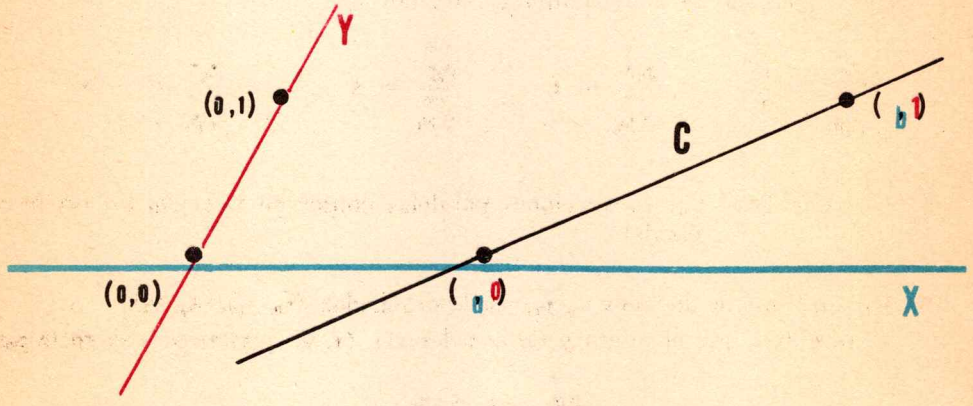


FIG. 375

¿Ecuación de la recta C?

¿Abscisa roja del punto cuya abscisa azul es 2?

¿Abscisa azul del punto cuya abscisa roja es -3?

15. El mismo problema en la situación siguiente

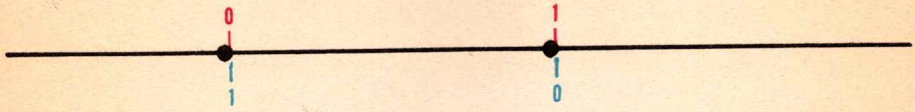


FIG. 376

(Este cambio de abscisa está definido por la ecuación $x + y - 1 = 0$)

16. El mismo problema en la situación siguiente.

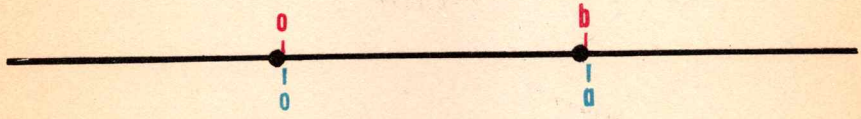


FIG. 377

Gráfico de este cambio de abscisa:

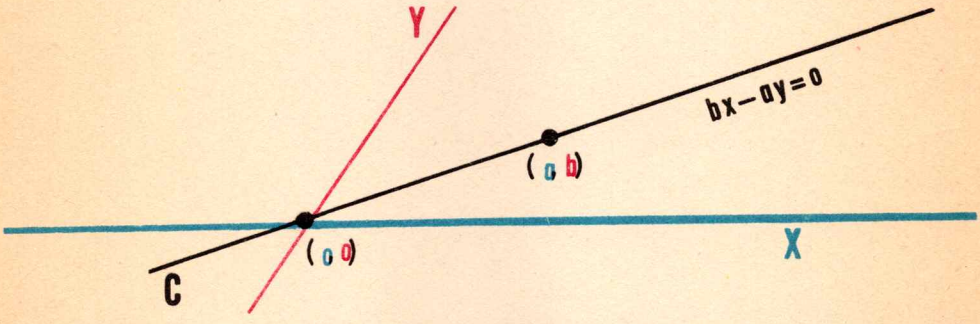
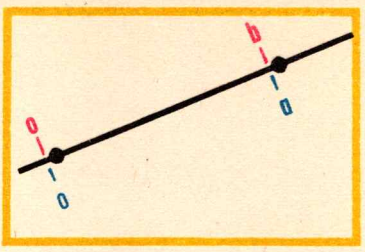


FIG. 378

El cambio de abscisa está definido por la ecuación $bx - ay = 0$

17. Cambio de unidad o cambio de abscisa conservan el cero.

Si



Entonces

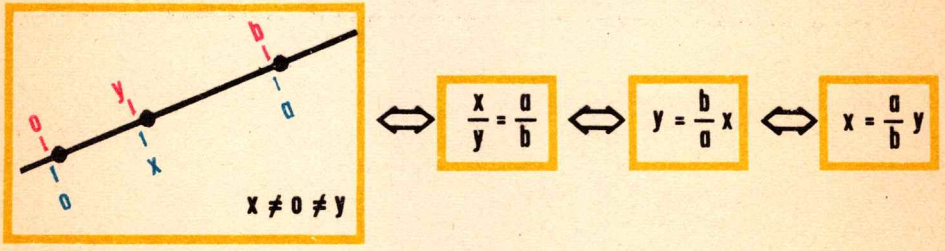


FIG. 379

ÍNDICE

ÍNDICE

página

abscisa 105
(cambio de —) 425
anillo conmutativo 267
aplicación (creciente - decreciente) 24
Arquímedes (axioma de —) 67
(teorema de —) .. 320, 329
asociatividad general 124
mixta 241
baricentro 169
base (del vectorial) 365
binario ilimitado 98
limitado 87
Cantor (teorema de —) 350, 351
centro de gravedad 169
cuerpo 268
cuerpo de números reales 266
ordenado de racionales . 331
ordenado de reales 275
conmutativo (anillo —) 267
(grupo —)
6, 122, 206, 219, 332, 371
continuo (potencia del —) 351
continuidad (axioma de —) .. 102, 112
coordenada (de un vector) 364
creciente (aplicación —) 24
decreciente (aplicación —) 24
Desargues (teorema de —) 168
desigualdad triangular 150
dirección (de un vector no nulo) . 9
Euclides (teorema de —) 320, 329
fracción 223
grupo 6
grupo conmutativo
6, 122, 206, 219, 332, 371
grupo conmutativo ordenado
28, 43, 50, 129, 276
homotecia 179
intervalo (cerrado; abierto; semi-
cerrado; semiabierto) 106
inverso (de un número real) 264
irracional (número —) 342
isomorfismo de grupos 47, 127, 221, 371

página

isomorfismo de vectoriales 374
linealidad 248
medianas (de un triángulo) 169
(el teorema de las —) . 173
multiplicación escalar 236
numerable (conjunto —) 334
número binario ilimitado 98
limitado 87
número decimal ilimitado 112
limitado 111
periódico 341
número irracional 342
racional 330
real 104
opuesto (de un número real) 264
ordenado (grupo conmutativo —)
28, 43, 50, 129, 276
ordenado (cuerpo —) 275, 331
orden 20
estricto 21
total 20
paralelos (vectores —) 7
parte densa 346, 354
punto fijo 178
razón (de una homotecia) 179
racional (número —) 330
referencia 54
(cambio de —) 425
segmento (cerrado; abierto; semi-
cerrado; semiabierto) 106
segmentos cerrados encajados .. 101
(sucesión binaria de —) 101
(sucesión decimal de —) 112
simétrico (de un número real) .. 121
(de un vector) 5
término 79
Thales (teorema de —) . 158, 163, 225
valor absoluto 147
aproximado 132, 150
vectores paralelos 7
vectoriales (espacios —) 357

TABLA DE MATERIAS

TABLA DE MATERIAS

página

CAPÍTULO 1. *El grupo* $\Pi_0, +$ 1

1. El plano punteado Π_0 1
2. El grupo conmutativo $\Pi_0, +$ 4
3. Vectores paralelos 7
4. Conjunto de vectores paralelos a un vector 9
5. Subgrupo de vectores paralelos a un vector 10
6. Ejercicios 12

CAPÍTULO 2. *El grupo* $D_0, +, \leqslant$ 19

1. Finalidad de este capítulo 19
2. Rectas orientadas 20
3. "Orden estricto" 21
4. Orden y "orden estricto" 22
5. Aplicaciones crecientes y decrecientes 24
6. Orden y proyección paralela 25
7. Adición y "orden estricto" 27
8. Adición y orden 29
9. Cálculo en el grupo ordenado $D_0, +, \leqslant$ 30
10. Multiplicación por un entero racional en el grupo $D_0, +, \leqslant$ 33
11. Ejercicios 36

CAPÍTULO 3. *Graduaciones de la recta* 41

1. El grupo ordenado $Z\vec{v}, +, \leqslant$ 41
2. Orden natural de Z 45
3. El grupo ordenado $Z, +, \leqslant$ 50
4. Graduación (afín) de la recta 52

CAPÍTULO 4. *Axioma de Arquímedes* 64

CAPÍTULO 5. *Sub-graduaciones de la recta* 72

1. Punto medio de un segmento 72
2. Graduación de la recta 74
3. Subgraduación binaria 76
4. Los medios 79
5. Subgraduaciones binarias sucesivas 83
6. Números binarios limitados 87

SIMON STEVIN 91

página

CAPÍTULO 6. *Números reales* 93

1. El conjunto de números binarios limitados no permite determinar todos los puntos de la recta D_{01} 93
2. Cómo determinar un punto de una recta graduada 96
3. Axioma de continuidad 99
4. Binarios limitados e ilimitados 102
5. Números reales 104
6. Orden de los reales 105
7. Decimales limitados e ilimitados 111

CAPÍTULO 7. *El grupo R, +, ⩽* 116

1. Adición de números reales 117
2. Conmutatividad y asociatividad de la adición de reales 120
3. El número cero es neutro para la adición de reales 121
4. Simétrico con respecto a la adición, u opuesto 121
5. El grupo R, + ... 122
6. Asociatividad general 123
7. La sustracción de reales 126
8. Los grupos R, + y D_0, + son isomorfos 127
9. El grupo ordenado R, +, ⩽ 128
10. Adición de binarios y de decimales limitados 130
11. Valores aproximados 132
12. Cálculo aproximado en R, +, ⩽ 136
13. Valor absoluto en R 147

ARQUÍMEDES 153

CAPÍTULO 8. *Teorema de Thales* 155

1. Enunciado del teorema de Thales 155
2. Demostración del teorema de Thales 159
3. Generalización 164
4. Ejercicios 165
5. Las medianas de un triángulo 169

THALES DE MILETO 176

CAPÍTULO 9. *Homotecias* 178

1. Puntos fijos de una transformación 178
2. Homotecia de centro c y de razón r 179

página

3. Homotecias particulares 182
4. Ejercicios 183
5. Homotecias no constantes u homotecias de razón no nula 188
6. Composición de homotecias de igual centro 190
7. El grupo $\mathcal{H}_c$ de homotecias de centro c y de razón no nula 192
8. Las homotecias no constantes conservan el paralelismo 193
9. Imagen de un vector por una homotecia 195
10. Homotecias y orden 200
11. Homotecias y abscisas 204
12. El grupo conmutativo $\mathcal{H}_c$ de homotecias no constantes de centro c 206

CAPÍTULO **10.** ***La multiplicación de números reales*** 208

1. Multiplicación de enteros racionales 208
2. Definición de la multiplicación de números reales 210
3. Conmutatividad de la multiplicación de números reales 216
4. Asociatividad de la multiplicación de números reales 216
5. Multiplicación por 0 y por 1 217
6. El grupo conmutativo R_0, ● 218
7. El isomorfismo $\mathcal{H}_c$, o $\rightarrow R_0$, ● 221
8. Signo del producto de dos reales 222
9. El grupo de reales estrictamente positivos 222
10. Fracciones 223
11. Teorema de Thales (nuevo enunciado) 225
12. Ejercicios 226

CAPÍTULO **11.** ***La multiplicación escalar*** 235

1. Multiplicación escalar 235
2. Multiplicación escalar y $\vec{o}$, o, 1_π 240
3. Asociatividad mixta 241
4. La multiplicación escalar distribuye la adición vectorial 242
5. La multiplicación escalar distribuye la adición de reales 243
6. Regla de los signos para la multiplicación escalar 244
7. Producto nulo de un vector por un número real 246
8. Linealidad de las proyecciones paralelas y de las homotecias 248
9. Razón de vectores paralelos 250
10. Ejercicios 252

CAPÍTULO **12.** ***El cuerpo ordenado de números reales*** 262

1. La multiplicación de números reales distribuye la adición 262
2. Regla de los signos para la multiplicación de reales 263
3. Inverso y opuesto 264

página

4. Fracciones y opuestos 265
5. La multiplicación de números reales distribuye la sustracción de números reales 265
6. R, +, ● es un cuerpo 266
7. Ejercicios de cálculo 269
8. Adición de fracciones 272
9. El cuerpo ordenado R, +, ●, $\leqslant$ 275
10. Fracciones y orden 281
11. Ejercicios 282

CAPÍTULO **13.** ***En el cuerpo ordenado de números reales*** 290

1. Potencias 290
2. Propiedades de las potencias .(Exponentes enteros racionales) 296
3. Potencias y orden 303
4. Cuadrado de una suma de reales 304
5. Diferencia de cuadrados de números reales 306
6. Ejercicios recapitulativos 307
7. Multiplicación de números binarios limitados 310
8. La multiplicación de números decimales limitados 314

CAPÍTULO **14.** ***Números racionales y números irracionales*** 318

1. Multiplicación de un número real 10^z (con $z \in Z$) 318
2. División arquimedeana 319
3. Decimal ilimitado igual a $\frac{a}{b}$ (con $a \in R$ y $b \in R_0$) 322
4. Ejercicios 325
5. Los números racionales 330
6. El cuerpo ordenado de números racionales 331
7. Conjuntos numerables 334
8. El conjunto de racionales es numerable 338
9. Números irracionales 340
10. Densidad del conjunto de números racionales 346
11. Potencia del continuo 348

CAPÍTULO **15.** ***Los vectoriales*** 356

1. El espacio vectorial R, Π_0, + ... 356
2. Definición de vectoriales (o espacios vectoriales) reales 357
3. Los espacios vectoriales son máquinas industriales de la matemática moderna 358
4. Cálculo en un vectorial 359
5. La multiplicación escalar no admite divisiones del cero 362
6. Bases - Coordenadas - Referencias 364
7. Adición de vectores y coordenadas 369
8. Multiplicación escalar y coordenadas 372

HERMANN GRASMANN 384

CAPÍTULO 16. *Ecuaciones de las rectas del plano* 385

1. Rectas que comprenden el origen o 385
2. Ecuaciones de las rectas del plano 389
3. Toda ecuación de primer grado define una recta 394
4. Recta que comprende dos puntos dados 395
5. Trazar la recta $D \equiv ax + by + c = 0$ (con $a, b, c \in R$ y $(a \neq o \ o \ b \neq o)$) 396
6. Ejercicios 399
7. Ecuaciones de la recta D_1 que comprende (x_1, y_1) y es paralela a $D \equiv ax + by + c = 0$ 404
8. Imagen de una recta por algunas transformaciones del plano 405

CAPÍTULO 17. *Semiplanos e inecuaciones* 408

1. Semiplanos e inecuaciones 408
2. Regiones del plano definidas por dos rectas secantes 412
3. Regiones del plano definidas por tres puntos no alineados 417

CAPÍTULO 18. *Cambio de referencias sobre una recta* 422

0. Revisión 422
1. Razón y abscisa 423
2. Cambio de referencia sobre una recta y el cambio de abscisas que de allí resulta 425
3. Gráfico de un cambio de abscisas 427
4. Determinación de temperaturas 428

ÍNDICE 436

Se terminó de imprimir
en los talleres gráficos CELINA S.C.A.,
Aconquija 3114, Buenos Aires,
en junio de 1970.

inecuaciones y cambios de referencia sobre una recta. Cada uno de ellos está acompañado de una serie de interesantes ejercicios programados.

Si bien los temas expuestos en esta obra son de gran trascendencia en la matemática moderna, su mérito fundamental consiste en el uso de recursos pedagógicos novedosos que hacen más accesible la materia. Los esquemas multicolores, los ejemplos inspirados en la vida cotidiana, las demostraciones mediante filmes, la simplicidad que domina toda la obra, son medios didácticos de gran valor, compatibles con el más severo rigor matemático.

Georges Papy se doctoró en matemática en la Universidad de Bruselas y pronto enseñó allí y en otras universidades extranjeras. Consagrado a la reforma de la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria, desde 1961 dirige el Centro Belga de Pedagogía de la Matemática.

OTROS TÍTULOS DE EUDEBA

Enseñanza de la matemática moderna · C. A. Trejo y J. Bosch
(Para el primero y segundo curso)

Ciclo medio de matemática moderna · C. A. Trejo y J. Bosch
(Para el primero, segundo y tercer curso)

Álgebra para escuelas secundarias · O. Varsavsky

Introducción al álgebra, nociones de álgebra lineal · M. Cotlar y C. Ratto de Sadosky

Introducción a la teoría de conjuntos · L. Oubiña

T. S. 1717

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES